

1. [10] Израчунати интеграл $\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} \right) \ln x \, dx$.
2. а) [5] Нека су $f, g, h : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ Лебег-мерљиве функције такве да је $f(x)^2 \leq g(x)h(x)$ за скоро сваки $x \in [0, 1]$. Доказати да за све Лебег-мерљиве скупове $E \subseteq [0, 1]$ важи

$$\left(\int_E f(x) \, dx \right)^2 \leq \left(\int_E g(x) \, dx \right) \left(\int_E h(x) \, dx \right).$$

- б) [5] Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и нека су $f, g, h : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ мерљиве функције. Надаље, нека су $p, q \in (1, \infty)$ такви да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Доказати да за сваки $E \in \mathfrak{M}$ важи

$$\int_E |fgh| \, d\mu \leq \left(\int_E |f|^p |h| \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q |h| \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

3. Нека је $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \mu)$ простор са мером и нека је низ функција $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисан са

$$f_n(x) = x^n \cos(2\pi nx).$$

- а) [3] Испитати конвергенцију низа $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μ скоро свуда.
- б) [2] Испитати конвергенцију низа $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ по мери μ .
- в) [2] Наћи све $p \in [1, +\infty)$ за које низ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира у L^p -норми.
- г) [3] Испитати конвергенцију низа $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира у L^∞ -норми.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова. Време за израду задатака је 135 минута.