

Математички факултет, Универзитет у Београду  
Анализа 2 (НВЛ смерови) - први поправак првог колоквијума  
1.7.2026.

1. На скупу  $C[0, 1]$  дате су функције  $d_1, d_2: C[0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$  са

$$d_1(f, g) = \left| \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx \right| \quad \text{и} \quad d_2(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

и два низа  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  и  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  са  $f_n(x) \equiv n$  и  $g_n(x) = \begin{cases} n - n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0, & x \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$

а) [4] Доказати да је тачно једна од функција  $d_1$  и  $d_2$  метрика на  $C[0, 1]$  и означимо је надаље са  $d$ .

б) [3] Нека је са  $d_\infty$  означена позната супремум метрика на  $C[0, 1]$  дата са

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

Израчунати  $d(f_n, 0)$ ,  $d_\infty(f_n, 0)$ ,  $d(g_n, 0)$  и  $d_\infty(g_n, 0)$  за свако  $n \in \mathbb{N}$ , где је са  $0$  означена функција идентички једнака нули.

в) [3] Испитати ограниченост и компактност простора  $(C[0, 1], d)$ .

г) [3] Доказати да за све  $f, g \in C[0, 1]$  важи  $d(f, g) \leq d_\infty(f, g)$ . Када се достиже једнакост?

д) [3] Доказати да метрике  $d$  и  $d_\infty$  нису еквивалентне.

ђ) [4] Испитати путну повезаност простора  $(C[0, 1], d)$ .

2. Дата је непрекидна функција  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  са

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin y - y^2 \sin x}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ c, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

а) [3] Одредити константу  $c \in \mathbb{R}$ .

б) [3] Наћи извод функције  $f$  у правцу произвољног јединичног вектора  $v = (a, b)$  у тачки  $(0, 0)$ .

в) [3] Испитати диференцијабилност функције  $f$  на скупу  $\mathbb{R}^2$ .

г) [3] Испитати непрекидност парцијалних извода функције  $f$  на скупу  $\mathbb{R}^2$ .

3. Нека је дата функција  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  са  $f(x, y, z) = x^3 y + xy^3 + z^2 - xy + 2z$ .

а) [5] Одредити локалне екстремуме функције  $f$ .

б) [7] Доказати да функција  $f$  достиже минимум и максимум на телу  $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + 2z \leq 9, z \geq -4\}$  и одредити директну слику  $f(T)$ .

в) [6] Доказати да једначина  $f(x, y, z) = -1$  дефинише јединствену имплицитну функцију  $y = \varphi(x, z)$  класе  $C^\infty$  на некој околини тачке  $(1, -2)$  такву да је  $\varphi(1, -2) = -1$ . Израчунати  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1, -2)$  и  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}(1, -2)$ .

**Напомена:** У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена.