

1. а) [4] Нека је дат простор $X = \mathbb{R}$ и на њему подскупови

$$S = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ ограничен}\} \quad \text{и} \quad T = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ ограничен и пребројив}\}.$$

Означимо са $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ σ -алгебре на X генерисане скуповима S и T , редом. Одредити $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.

- б) [5] Дате су функције

$$\lambda(A) = \begin{cases} 0, & A \text{ је пребројив,} \\ 1, & A \text{ је непребројив.} \end{cases}, \quad \mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ \sup_{x \in A} |x|, & A \neq \emptyset \text{ и } A \text{ је ограничен,} \\ +\infty, & A \text{ није ограничен.} \end{cases}$$

и $\mu_{2026}(A) = \frac{\text{card}(\{m \in A \mid 1 \leq m \leq 2026\})}{2026}$ дефинисане на $A \subseteq \mathbb{R}$. Да ли су одговарајуће рестрикције ових функција на $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ мере?

- в) [3] Дате су функције $f(x) = e^x$, $g(x) = [\sin x]$ и $h(x) = \begin{cases} [x], & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ Испитати њихову $\mathfrak{M}$ -мерљивост и $\mathfrak{N}$ -мерљивост.

2. а) [4] Доказати да је важи неједнакост $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$ за све $x \geq 0$.

- б) [9] Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{1 + nx^8} dx$.

3. [13] Израчунати $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2x) \sin(6x)}{x^2} e^{-8x} dx$.

4. Нека је $([0, \pi], \mathcal{B}[0, \pi], \mu)$ простор са мером и нека је низ функција $f_n: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисан са

$$f_n(x) = \frac{n \sin x}{1 + n^2 \sin^2 x}.$$

- а) [3] Испитати конвергенцију низа $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μ скоро свуда.
б) [3] Испитати конвергенцију низа $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ по мери μ .
в) [3] Наћи све $p \in [1, +\infty)$ за које низ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира у L^p -норми.
г) [3] Испитати конвергенцију низа $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира у L^∞ -норми.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи бодова.