

Elementarna

matematika

2026/2027

Tok 104

Racionalisanje razlomaka, Absolutne vrednosti

①

Рационалисати изразе (тј. трансформисати их тако да се у именицима разломака не појављују корени): $\frac{10}{3\sqrt[3]{5}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+1}$; $\frac{1}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}}$; $\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$.

▲: а) $\frac{10}{3\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}^2}{\sqrt[3]{5}^2} = \frac{\cancel{10} \sqrt[3]{5}^2}{3 \cdot \cancel{5}} = \frac{2 \sqrt[3]{5}^2}{3}$

Podsetnik: • $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

• $x^3 \pm y^3 = (x \mp y)(x^2 \pm xy + y^2)$

• $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$
 $= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{5}^2 - \sqrt[3]{5} + 1}{\sqrt[3]{5}^2 - \sqrt[3]{5} + 1} = \frac{\sqrt[3]{5}^2 - \sqrt[3]{5} + 1}{\underbrace{\sqrt[3]{5}^3 + 1}_6} = \frac{1}{6} (\sqrt[3]{5}^2 - \sqrt[3]{5} + 1)$

Razlika kubova ↑

v) $\frac{1}{\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{3}} \cdot \frac{(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{2 - 3} =$
 $= -(\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ Razlika 4. stepena

g) $\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{\dots} + \sqrt{\dots}}{\sqrt{\dots} - \sqrt{\dots}} = \frac{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}}{\dots}$
 $= \frac{2\sqrt{3} + \cancel{\sqrt{2}} + 2 \cdot \sqrt{(2\sqrt{3}+\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})} + 2\sqrt{3} - \cancel{\sqrt{2}}}{2\sqrt{3} + \sqrt{2} - (2\sqrt{3} - \sqrt{2})} =$

$$= \frac{\cancel{1}\sqrt{3} + \cancel{2}\sqrt{12-2}}{\cancel{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{10}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$$

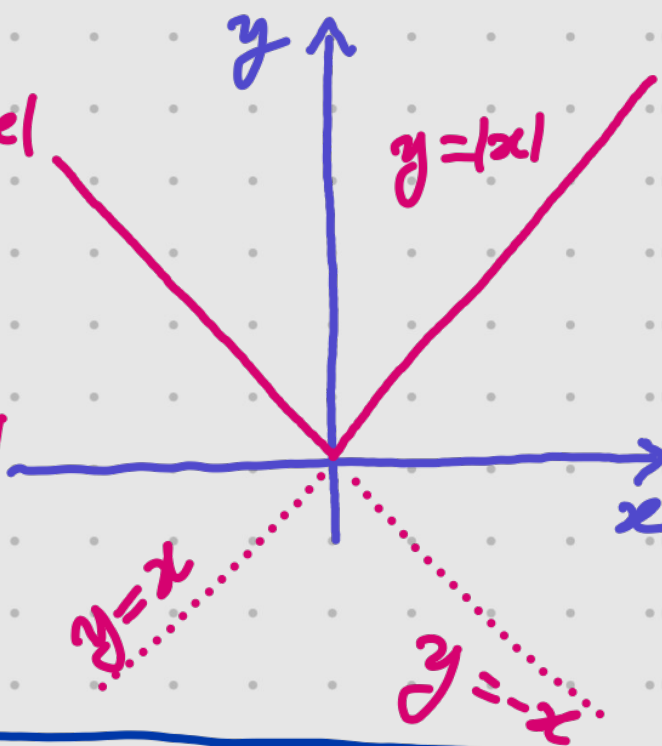
Podsećanje: Absolutna zagrada

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Grafik f je $f(x) = |x|$

$$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f, y = f(x)\}$$



Malo više ćemo pričati o funkcijama kasnije...

Решити једначине:

(a) $|5x + 2| + x = 19;$

(б) $|1 + x| - |x - 1| = 0; \underline{|x + 8| + |x - 2| = 10};$

(в) $|2 - x| - |x - 4| = |x - 6|;$

(г) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{4 + 4x + x^2};$

(д) $|x + 2| + \sqrt{4x^2 + 8x + 4} = |x + 1|;$

(ђ) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = 2x - 3; \underline{|x| + |x - 1| = 3}.$



$$a) |5x + 2| = \begin{cases} 5x + 2, & 5x + 2 \geq 0 \\ -5x - 2, & 5x + 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 5x + 2, & x \geq -\frac{2}{5} \\ -5x - 2, & x < -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Zbog ovoga, razmatramo dva slučaja:

① $x \geq -\frac{2}{5}$: $|5x+2| + x = 19$

$\Leftrightarrow 6x+2=19 \Leftrightarrow 6x=17$

$\Leftrightarrow x = \frac{17}{6} \in \left[-\frac{2}{5}, +\infty\right)$

Bitno je uvek proveriti uslov s početka

② $x < -\frac{2}{5}$: $|5x+2| + x = 19$

$\Leftrightarrow -4x-2=19 \Leftrightarrow -4x=21$

$\Leftrightarrow x = -\frac{21}{4} \in (-\infty, -\frac{2}{5})$

$-\frac{21}{4} \boxed{<} -\frac{2}{5}$

$-21 \cdot 5 \boxed{<} -2 \cdot 4$
" " " "
 $-105 \quad -8$

$\cdot 4 \cdot 5$

ne menja

smer
nejednakosti

Da li važi $\boxed{<}$?

$\Rightarrow$ Odgovor je da!

Skup rešenja početne jednačine:

$R = \left\{ -\frac{21}{4}, \frac{17}{6} \right\}$

$$b) |1+x| - |x-1| = 0$$

$$|1+x| = \begin{cases} 1+x, & x \geq -1 \\ -1-x, & x < -1 \end{cases}$$

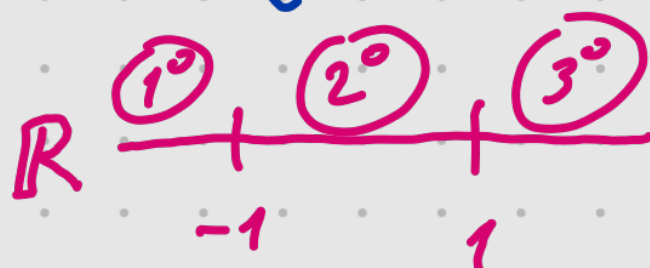
Zbog ovog, imamo
tri slučaja:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$$

① $x < -1$:

$$|1+x| - |x-1| = 0$$

$$\Leftrightarrow -1-x - (1-x) = 0 \Leftrightarrow -2 = 0 \quad \text{✗}$$



$\Rightarrow$ Početna jednačina nema
rešenje koje pripada
skupu $(-\infty, -1)$!

② $x \in [-1, 1)$:

$$|1+x| - |x-1| = 0 \Leftrightarrow 1+x - (1-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-1, 1)$$

✓

③ $x \geq 1$: $|1+x| - |x-1| = 0 \Leftrightarrow 1+x - (x-1) = 0$

$$\Leftrightarrow 2 = 0 \quad \text{✗}$$

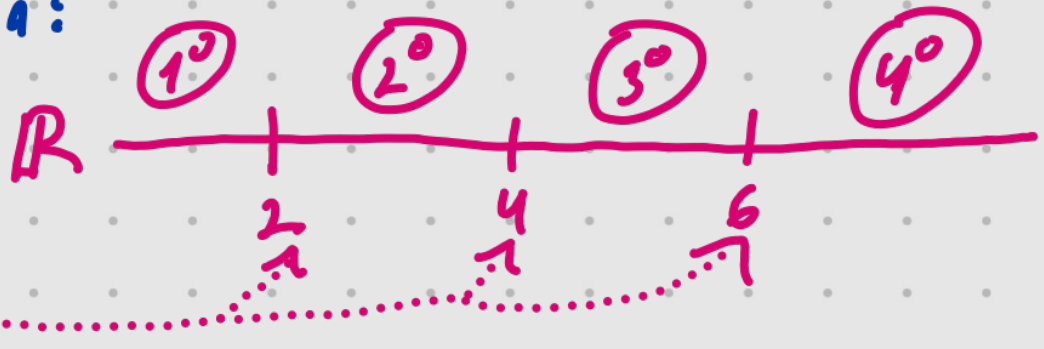
$\Rightarrow$ Skup rešenja je $R = \{0\}$

v) Analogno kao u b), jednačinu

$$|2-x| - |x-4| = |x-6|$$

$$\Leftrightarrow |2-x| - |x-4| - |x-6| = 0 \quad (*)$$

možemo da rešimo tako što posmatramo četiri slučaja:



U ovim tačkama, izrazi u apsolutnicama zagrada (redom $2-x$, $x-4$ i $x-6$) menjaju znak.

1° $x < 2$: $(*) \Leftrightarrow 2-x - (-x+4) - (-x+6) = 0$

$$\Leftrightarrow 2-x + x-4 + x-6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-8 = 0 \Leftrightarrow x=8$$

$\notin (-\infty, 2)$

2° $x \in [2, 4]$: $(*) \Leftrightarrow -2+x + x-4 + x-6 = 0$

$$\Leftrightarrow 3x-12=0 \Leftrightarrow x=4 \in [2, 4]$$

3° $x \in [4, 6]$: $(*) \Leftrightarrow -2+x - \cancel{x+4} + \cancel{x-6} = 0$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \notin (4, 6]$$

$$4^o) \underline{x > 6}: (*) \Leftrightarrow -2 + \cancel{x} - \cancel{x} + 4 - x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 8 \in (6, +\infty)$$

$\Rightarrow$ Skup rešenja: $R = \{4, 8\}$

$$g) \sqrt{\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2}} + \sqrt{\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2}} = \sqrt{\underbrace{4 + 4x + x^2}_{(2+x)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{(2+x)^2} \Leftrightarrow |x-2| + |x+1| = |2+x|$$

$\Rightarrow$ Identično kao prethodni deo zadatka $\Rightarrow$ 

$$d) |x+2| + \sqrt{\underbrace{4x^2 + 8x + 4}_{4(x+1)^2}} = |x+1|$$

$$\Leftrightarrow |x+2| + \sqrt{(2(x+1))^2} = |x+1| \Leftrightarrow |x+2| + \cancel{2|x+1|} = \cancel{|x+1|}$$

$$\Leftrightarrow |x+2| + |x+1| = 0 \Rightarrow \text{}$$

3

Решити неједначине:

(a) $|x| \leq 3; |x| \geq 4;$

(б) $|x - 2| \leq 6; |3x + 4| > 4;$

(в) $|2x - 3| < x; \underline{|x - 2| \leq |x + 4|};$

(г) $|x + 2| > |x|; \underline{|x - 2| > |x + 1| - 1};$

(д) $||x| - 3| \leq 1; \underline{||x + 2| - |x - 2|| < 1}.$



$$a) |x| \leq 3 ; |x| \geq 4$$

$$\rightarrow (1^\circ) \underline{x \geq 0}: x \geq 4$$

$$\Rightarrow x \in [4, +\infty)$$

$$(1^\circ) \underline{x \geq 0} \vee (2^\circ) \underline{x < 0}$$

$$\Rightarrow x \leq 3$$

$$\Rightarrow x \in [0, 3]$$

$$\Rightarrow -x \leq 3$$

$$\Rightarrow x \geq -3$$

$$\Rightarrow x \in [-3, 0)$$

$$\Rightarrow R = [-3, 0) \cup [0, 3] = [-3, 3]$$

$$\rightarrow (2^\circ) \underline{x < 0}: -x \geq 4$$

$$\Rightarrow x \leq -4$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -4]$$



$$R = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$$

$$b) |x-2| \leq 6$$

$$(1^\circ) \underline{x \geq 2}: \vee (2^\circ) \underline{x < 2}:$$

$$x-2 \leq 6$$

$$\Rightarrow x \leq 8$$

$$\Rightarrow x \in [2, 8]$$

$$2-x \leq 6$$

$$\Rightarrow -4 \leq x$$

$$\Rightarrow x \in [-4, 2)$$

$$\Rightarrow R = [-4, 2) \cup [2, 8] = [-4, 8]$$

$$= [2-6, 2+6]$$

Pitanje: Da li je ovo slučajnost?

Obraditi skup rešenja nejednakosti

$$|x-a| \leq \varepsilon, a \in \mathbb{R}, \varepsilon \geq 0$$

$$|3x+4| > 4$$

$$(1^\circ) \underline{x \geq -\frac{4}{3}}$$

$$3x+4 > 4$$

$$\Downarrow$$

$$3x > 0$$

$$\Downarrow$$

$$x > 0$$

$$\Downarrow$$

$$x \in (0, +\infty)$$

$$(2^\circ) \underline{x < -\frac{4}{3}}$$

$$-3x-4 > 4$$

$$\Downarrow$$

$$-8 > 3x$$

$$\Downarrow$$

$$x < -\frac{8}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$x \in (-\infty, -\frac{8}{3})$$

$$\Rightarrow R = (-\infty, -\frac{8}{3}) \cup (0, +\infty)$$

$$v) \underbrace{|2x-3| < x}_{(*)} \rightarrow (1^o) \underline{x \geq \frac{3}{2}}: (*) \Leftrightarrow 2x-3 < x$$

$$\Rightarrow x < 3$$

$$\Rightarrow x \in [\frac{3}{2}, 3)$$

$$\downarrow (2^o) \underline{x < \frac{3}{2}}: (*) \Leftrightarrow -2x+3 < x$$

$$\Rightarrow 3 < 3x$$

$$\Rightarrow x > 1$$

$$\Rightarrow x \in (1, \frac{3}{2})$$

Skup rešenja je

$$R = (1, \frac{3}{2}) \cup [\frac{3}{2}, 3) =$$

$$= (1, 3)$$

$$g) |x+2| - |x| > 0 \quad (*)$$

$$\mathbb{R} \quad \begin{array}{c} (1^o) \quad (2^o) \quad (3^o) \\ | \quad | \quad | \\ -2 \quad 0 \end{array}$$

$$(1^o) \underline{x < -2}: (*) \Leftrightarrow -x-2+x > 0$$

$$\Leftrightarrow -2 > 0 \quad \text{fals}$$

$$\Leftrightarrow -2 > 0 \quad \text{fals}$$

$$(2^o) \underline{x \in [-2, 0)}$$

$$(*) \Leftrightarrow x+2+x > 0$$

$$\Leftrightarrow 2x+2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -1$$

$$\Rightarrow x \in (-1, 0)$$

$$(3^o) \underline{x \geq 0}: (*) \Leftrightarrow x+2-x > 0$$

$$\Leftrightarrow 2 > 0 \quad \checkmark \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x \geq 0$$

$$\Rightarrow R = (-1, 0) \cup [0, +\infty) = (-1, +\infty)$$

$$d) | |x| - 3 | \leq 1 \quad (*)$$

$$| |x| - 3 | = \begin{cases} |x| - 3, & |x| \geq 3 \\ -|x| + 3, & |x| < 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} |x| - 3, & x \geq 3 \text{ ili } x \leq -3 \\ -|x| + 3, & -3 < x < 3 \end{cases}$$

Ovde treba
da raspisemo
 $|x|$

u zavisnosti

od toga
da li je
 $x \geq 0$ ili

$x < 0$

$$= \begin{cases} x - 3, & x \geq 3 & (1^o) \\ -x - 3, & x \leq -3 & (2^o) \\ x + 3, & x \in (-3, 0) & (3^o) \\ -x + 3, & x \in [0, 3) & (4^o) \end{cases}$$

Poenta je da se prvo oslobodimo
jedne apsolutne zagrade, pa onda druge!

$$(1^o) \underline{x \geq 3}: (*) \Leftrightarrow x - 3 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 4 \Rightarrow x \in [3, 4]$$

$$(2^o) \underline{x \leq -3}: (*) \Leftrightarrow -x - 3 \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq x \Rightarrow x \in [-4, -3]$$

$$(3^o) \underline{x \in (-3, 0)}: (*) \Leftrightarrow x + 3 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq -2 \Rightarrow x \in (-3, -2]$$

$$(4) \underline{x \in [0, 3)}: (\otimes) \Leftrightarrow -x+3 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq x \Rightarrow x \in [2, 3)$$

$$\Rightarrow R = [-4, -3] \cup (-3, -2] \cup [2, 3) \cup [3, 4] \\ = [-4, -2] \cup [2, 4] \quad \blacksquare$$

(4) Нацртати графике функција:

(a) $y = |2x + 1| - |x - 2|;$

(б) $y = |2x - 1| - |x + 2|.$ 

▲: а) $f(x) = |2x+1| - |x-2|$

Samo treba da raspíšemo apsolutne zgrade slično kao u prethodna dva zadataka.

$$R \quad \begin{array}{c} \textcircled{1^o} \quad \textcircled{2^o} \quad \textcircled{3^o} \\ \hline -\frac{1}{2} \quad 2 \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-1+x-2, & x < -\frac{1}{2} \\ 2x+1+x-2, & x \in [-\frac{1}{2}, 2) \\ 2x+1-x+2, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x-3, & x < -\frac{1}{2} \\ 3x-1, & x \in [-\frac{1}{2}, 2) \\ x+3, & x \geq 2 \end{cases}$$

