

Zadaci iz Verovatnoće

Biostatistika

Nikola Vučić

Zadatak 1. Bolnica poseduje 50 jedinica krvi označenih sa A^+ . Međutim, četiri jedinice su u stvari A^- . Slučajno se bira jedna jedinica krvi. Ako svaka jedinica ima istu verovatnoću da se izabere, odrediti verovatnoću da se izabere pogrešno označena jedinica.

Rešenje:

Ukupan broj jedinica krvi: $N = 50$.

Broj pogrešno označenih jedinica: $k = 4$.

Pošto je svaka jedinica jednako verovatna (klasična definicija verovatnoće):

$$P(\text{pogrešno označena}) = \frac{k}{N} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25} = 0,08.$$

Verovatnoća da se izabere pogrešno označena jedinica krvi iznosi **0,08** (tj. 8%).

Zadatak 2. Prema statistici košarkaš pogađa 82% slobodnih bacanja. Ako ga fauliraju i dobije dva slobodna bacanja, odrediti verovatnoću da:

- a) pogodi oba bacanja;
- b) promaši oba bacanja;
- c) pogodi tačno jedno bacanje;
- d) pogodi bar jedno bacanje.

Rešenje:

Verovatnoća pogotka jednog bacanja: $p = 0,82$, verovatnoća promašaja: $q = 1 - p = 0,18$. Bacanja su međusobno nezavisna.

a) Oba pogođena:

$$P(\text{oba pogođena}) = p^2 = 0,82^2 = \mathbf{0,6724}.$$

b) Oba promašena:

$$P(\text{oba promašena}) = q^2 = 0,18^2 = \mathbf{0,0324}.$$

c) Tačno jedno pogođeno:

$$P(\text{tačno jedno}) = p q + q p = 2 \cdot 0,82 \cdot 0,18 = \mathbf{0,2952}.$$

d) Bar jedno pogođeno – koristimo komplement događaja “oba promašena”:

$$P(\text{bar jedno}) = 1 - q^2 = 1 - 0,0324 = \mathbf{0,9676}.$$

Zadatak 3. Kod biljke graska alel za visinu (V) je dominantan nad alelom za nisku stabljiku (v), alel za žuto zrno (Z) je dominantan nad zelenim (z), a alel za okruglast oblik (O) je dominantan nad alelom za naborano zrno (o). Ukrštaju se dve biljke sa genima $VVZZOo$ i $VvZzOo$.

- Opisati roditeljske biljke.
- Nacrtati stablo mogućih načina ukrštanja i opisati nastale biljke.
- Odrediti verovatnoću nastanka visoke biljke.
- Odrediti verovatnoću nastanka visoke biljke sa okruglim i žutim zrnom.
- Odrediti verovatnoću nastanka biljke sa zelenim zrnom.

Rešenje:

a)

- Biljka $VVZZOo$: visoka (VV), žuto zrno (ZZ), heterozigotna za oblik zrna (Oo). Međutim pošto je O dominantno nad o biljka ima okruglast oblik zrna.
- Biljka $VvZzOo$: visoka (Vv), žuto zrno (Zz), heterozigotna za oblik (Oo). Međutim pošto je O dominantno nad o biljka ima okruglast oblik zrna.

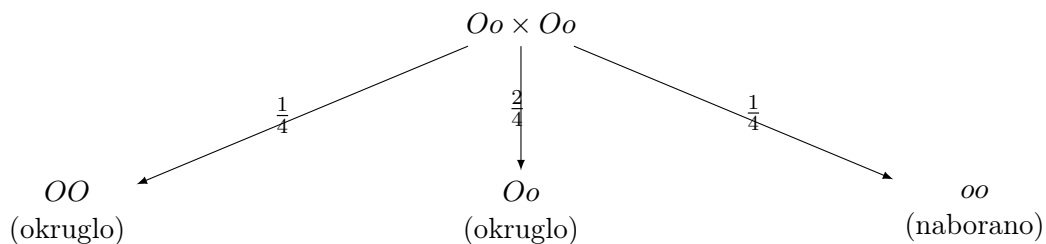
b) Razmatramo svaki gen posebno:

Gen V: $VV \times Vv \Rightarrow$ potomci: $\frac{1}{2}VV$, $\frac{1}{2}Vv$ – svi visoki.

Gen Z: $ZZ \times Zz \Rightarrow$ potomci: $\frac{1}{2}ZZ$, $\frac{1}{2}Zz$ – svi žuto zrno.

Gen O: $Oo \times Oo \Rightarrow$ potomci: $\frac{1}{4}OO$, $\frac{2}{4}Oo$, $\frac{1}{4}oo$.

Stablo za gen O :



Svi potomci su visoki i imaju žuto zrno; po obliku: 3 okrugla : 1 naborano.

c) Svi potomci nasledili su bar jedan V alel, pa je:

$$P(\text{visoka}) = 1.$$

d) Potomak naših biljaka je uvek visok i ima žuto zrno tako da je jedino što je ostalo slučajno samo oblik zrna. Zrna su okrugla ako su geni za oblik OO ili Oo .

$$P(\text{Visoka} \cap \text{uta} \cap \text{okrugla}) = P(\text{okrugla}) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} = \mathbf{0,75}.$$

e) Gen Z: $ZZ \times Zz$ ne može dati zz , dakle:

$$P(\text{zeleno zrno}) = 0.$$

Zadatak 4. Kod zamorčica kratko krzno je dominantno nad dugim, a crno nad albino. Ženka crne boje sa kratkim krznom je uparena sa albino mužjakom dugog krzna.

- Koji su mogući genotipi roditelja?
- Nacrtati stablo mogućih načina ukrštanja za sve genotipove roditelja.
- Odrediti verovatnoću nastanka albino zamorčeta kratkog krzna (u svakom slučaju).

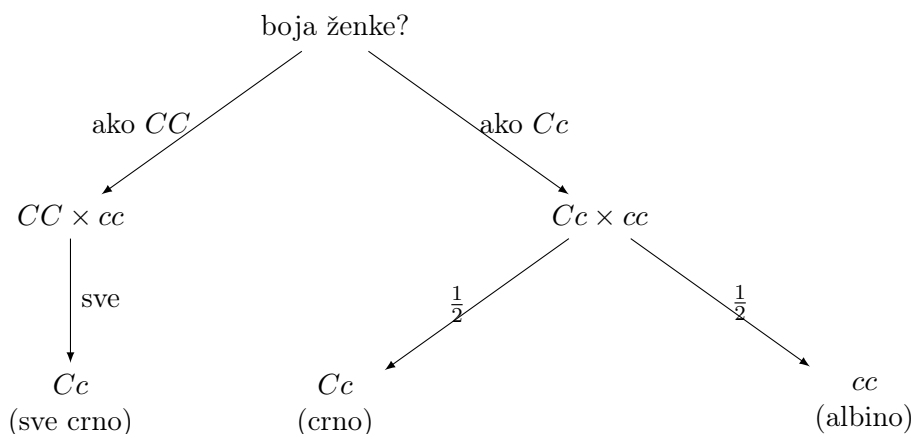
Rešenje:

Neka je: C – crno (dom.), c – albino (rec.); K – kratko (dom.), k – dugo (rec.).

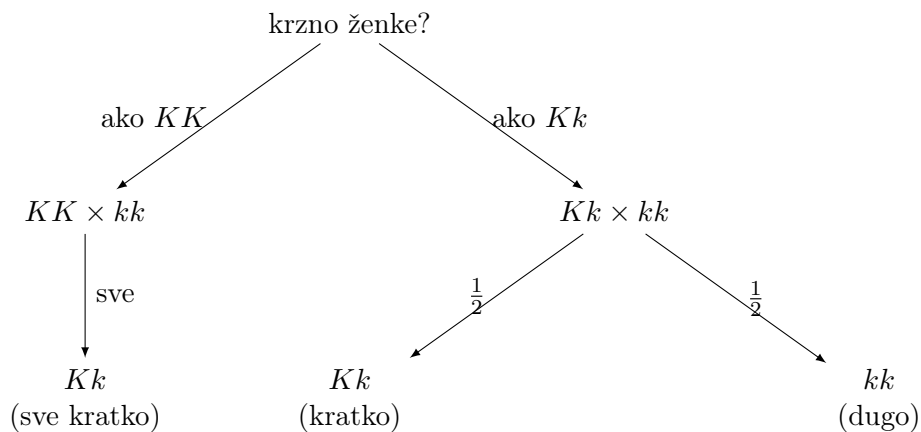
a)

- Ženka: $C_ , K_$. Mogući genotipi: $CCKK, CCKk, CcKK, CcKk$.
- Mužjak: jedini mogući genotip je $cckk$.

b) Stablo za gen boje:



Stablo za gen dužine krzna:



c) Albino kratko krzno = cc i K_- :

- $CCKK \times cckk$: svi $CcKk$ (crno, kratko). $P = 0$.
- $CCKk \times cckk$: boja – svi Cc ; krzno – $\frac{1}{2}Kk$, $\frac{1}{2}kk$. $P = 0$.
- $CcKK \times cckk$: boja – $\frac{1}{2}Cc$, $\frac{1}{2}cc$; krzno – svi Kk .

$$P = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

- $CcKk \times cckk$: boja – $\frac{1}{2}cc$; krzno – $\frac{1}{2}Kk$.

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Zadatak 5. Odrediti uzorački prostor za eksperiment koji predstavlja krvne grupe sa Rh faktorom. Definisani su događaji: A – krv sadrži A antigen, B – krv sadrži B antigen, P – Rh faktor je pozitivan. Odrediti događaje: $\bar{A}$, $\bar{A} \cap P$, $\bar{A} \cap \bar{B}$, $A \cup B$, $(A \cap B) \setminus P$.

Rešenje:

Uzorački prostor: $\Omega = \{A^+, A^-, B^+, B^-, AB^+, AB^-, O^+, O^-\}$.

- $A = \{A^+, A^-, AB^+, AB^-\}$
- $B = \{B^+, B^-, AB^+, AB^-\}$
- $P = \{A^+, B^+, AB^+, O^+\}$

Traženi događaji:

$$\bar{A} = \{B^+, B^-, O^+, O^-\}$$

$$\bar{A} \cap P = \{B^+, O^+\}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{O^+, O^-\}$$

$$A \cup B = \{A^+, A^-, B^+, B^-, AB^+, AB^-\}$$

$$(A \cap B) \setminus P = \{AB^+\}$$

Zadatak 6. Proučavanje pokazuje da 12% od svih ljudi koji posete lekara bude zadržano u bolnici. Od svih koji dođu na pregled, 1% ima lošu reakciju na određeni lek, a 12,4% se zadrži u bolnici *ili* ima lošu reakciju na lek. Odrediti verovatnoću da slučajno iyabrana osoba:

- bude zadržana u bolnici i ima lošu reakciju na lek
- bude zadržana u bolnici i nema lošu reakciju na lek
- ne bude zadržana u bolnici i ima lošu reakciju na lek.

Rešenje:

Označimo: H – zadržan u bolnici, R – loša reakcija na lek.

$$P(H) = 0,12, \quad P(R) = 0,01, \quad P(H \cup R) = 0,124.$$

a)

$$P(H \cap R) = P(H) + P(R) - P(H \cup R) = 0,12 + 0,01 - 0,124 = \mathbf{0,006}.$$

b)

$$P(H \cap \bar{R}) = P(H) - P(H \cap R) = 0,12 - 0,006 = \mathbf{0,114}.$$

c)

$$P(R \cap \bar{H}) = P(R) - P(H \cap R) = 0,01 - 0,006 = \mathbf{0,004}.$$

Zadatak 7. Eksperiment se sastoji od izvlačenja jedne karte iz dobro pomešanog špila. Neka je H – izvučen je štih (desetka, žandar, dama, kralj ili kec), B – karta je crne boje. Odrediti: $P(H)$, $P(B)$, $P(H \cap B)$, $P(H|B)$, $P(B|H)$, da li $P(H|B) = P(B|H)$?

Rešenje:

Špil ima 52 karte; štihovi u 4 znaka: $4 \times 5 = 20$ karata; crne karte: 26.

$$P(H) = \frac{20}{52} = \frac{5}{13}, \quad P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}, \quad P(H \cap B) = \frac{10}{52} = \frac{5}{26}.$$

$$P(H|B) = \frac{P(H \cap B)}{P(B)} = \frac{5/26}{1/2} = \frac{5}{13} \approx 0,385.$$

$$P(B|H) = \frac{P(H \cap B)}{P(H)} = \frac{5/26}{5/13} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Ne, $P(H|B) \neq P(B|H)$. Primetimo da $P(H|B) = P(H)$, dakle H i B su *nezavisni*.

Zadatak 8. Zdravstvena organizacija procenjuje da 15% odrasle populacije ima hipertenziju. Istraživanje pokazuje da 75% svih odraslih misli da oni lično nemaju hipertenziju. Procenjeno je da 6% svih odraslih ima hipertenziju, ali ne misli da je ima.

a) Ako odrasli pacijent smatra da nema hipertenziju, odrediti verovatnoću da je bolest prisutna.

b) Ako je bolest prisutna, odrediti verovatnoću da pacijent sumnja u njeno prisustvo.

Rešenje:

Označimo: D – ima hipertenziju, $\bar{S}$ – misli da nema hipertenziju.

$$P(D) = 0,15, \quad P(\bar{S}) = 0,75, \quad P(D \cap \bar{S}) = 0,06.$$

a)

$$P(D | \bar{S}) = \frac{P(D \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{0,06}{0,75} = \mathbf{0,08}.$$

b)

$$P(D \cap S) = P(D) - P(D \cap \bar{S}) = 0,15 - 0,06 = 0,09.$$

$$P(S \mid D) = \frac{P(D \cap S)}{P(D)} = \frac{0,09}{0,15} = \mathbf{0,6}.$$

Zadatak 9. Lažno pozitivna stopa medicinskog testa je verovatnoća da test pokaže prisustvo bolesti kada zapravo bolest ne postoji.

- a) Da li bi lažno pozitivna stopa trebala da bude mala ili velika?
- b) Nova metoda za detekciju bolesti bubrega: 49% ispitanika je pozitivno na novom testu, 39% zaista ima bolest, 17% nema bolest ali novi test pokazuje da ima. Odrediti lažno pozitivnu stopu.
- c) Ako novi test da pozitivan rezultat, da li je to jasan dokaz prisustva bolesti?
- d) Kako bi se definisala lažno negativna stopa?
- e) Šta je povoljnije za pacijenta: mala lažno pozitivna ili mala lažno negativna stopa?

Rešenje:

a) Lažno pozitivna stopa bi trebalo da bude **mala**.

b) Označimo: T^+ – test pozitivan, D – bolest postoji.

$$P(D) = 0,39, \quad P(\overline{D}) = 0,61, \quad P(T^+ \cap \overline{D}) = 0,17.$$

$$P(T^+ \mid \overline{D}) = \frac{0,17}{0,61} \approx \mathbf{0,279}.$$

c) Pozitivan test nije siguran dokaz – oko 28% zdravih dobija pozitivan rezultat, pa je potrebna dalja provera.

d) Lažno negativna stopa je $P(\overline{T^+} \mid D)$ – verovatnoća da test ne detektuje bolest koja zapravo postoji.

e) Za pacijenta je povoljnija mala lažno negativna stopa, jer propuštanje bolesti nosi veći zdravstveni rizik.

Zadatak 10. U nekoj populaciji 9% ljudi ima krv tipa B, a 61% ima pozitivan Rh faktor. Odrediti verovatnoću da slučajno izabrana osoba ima B^+ krv.

Rešenje:

Pretpostavljamo nezavisnost krvne grupe i Rh faktora:

$$P(B^+) = P(B) \cdot P(P) = 0,09 \times 0,61 = \mathbf{0,0549} \approx 5,5\%.$$

Zadatak 11. Ako bračni par, gde i muškarac i žena imaju jedan recesivan (plavi) i jedan dominantan (braon) gen za boju očiju, ima dete ono sa verovatnoćom $3/4$ ima braon oči. Ako taj par ima dva deteta, odrediti verovatnoću da:

- a) oba imaju braon oči;
- b) jedno ima plave, a drugo braon oči.

Rešenje:

$p = \frac{3}{4}$ (braon), $q = \frac{1}{4}$ (plave). Deca su nezavisna.

a)

$$P = p^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} = \mathbf{0,5625}.$$

b)

$$P = 2pq = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} = \mathbf{0,375}.$$

Zadatak 12. Sa verovatnoćom 0,2 osoba izložena rubeoli i dobije je. Ako je ženska osoba izložena riziku tokom trudnoće, verovatnoća je 0,1 da će dete imati defekt; inače je ta verovatnoća 0,01.

a) Ako je dete rođeno sa defektom, odrediti verovatnoću da je majka bila izložena tokom trudnoće.

b) Ako je dete rođeno bez defekta, odrediti verovatnoću da je majka bila izložena tokom trudnoće.

Rešenje:

E – majka izložena, $\bar{E}$ – majka nije izložena; D – dete ima defekt.

$$P(E) = 0,2, \quad P(\bar{E}) = 0,8, \quad P(D | E) = 0,1, \quad P(D | \bar{E}) = 0,01.$$

Ukupna verovatnoća defekta:

$$P(D) = 0,1 \cdot 0,2 + 0,01 \cdot 0,8 = 0,02 + 0,008 = 0,028.$$

a) Bajesova teorema:

$$P(E | D) = \frac{0,1 \cdot 0,2}{0,028} = \frac{0,02}{0,028} \approx \mathbf{0,714}.$$

b)

$$P(\bar{D}) = 0,972, \quad P(\bar{D} | E) = 1 - P(D | E) = 0,9.$$

$$P(E | \bar{D}) = \frac{0,9 \cdot 0,2}{0,972} = \frac{0,18}{0,972} \approx \mathbf{0,185}.$$

Zadatak 13. Proučavano je koliko muškarci i žene piju. Podaci:

	Muškarci	Žene
Konstantno	23%	40%
Često	21%	5%
Umereno	46%	37%
Retko	10%	18%

Pretpostavlja se $P(M) = P(F) = 0,5$.

- a) Slučajno izabrana osoba konstantno pije. Koja je verovatnoća da je muškarac?
 b) Slučajno izabrana osoba retko pije. Koja je verovatnoća da je žena?

Rešenje:

a) $P(K | M) = 0,23$, $P(K | F) = 0,40$.

$$P(K) = 0,23 \cdot 0,5 + 0,40 \cdot 0,5 = 0,315.$$

$$P(M | K) = \frac{0,23 \cdot 0,5}{0,315} = \frac{0,115}{0,315} \approx \mathbf{0,365}.$$

b) $P(R | M) = 0,10$, $P(R | F) = 0,18$.

$$P(R) = 0,10 \cdot 0,5 + 0,18 \cdot 0,5 = 0,14.$$

$$P(F | R) = \frac{0,18 \cdot 0,5}{0,14} = \frac{0,09}{0,14} \approx \mathbf{0,643}.$$

Zadatak 14. Četiri ribonukleotida (A, U, G, C) formiraju “reči” – nizove od tri ribonukleotida (ponavljanje dozvoljeno).

- a) Koliko reči se može formirati?
 b) Koliko od tih reči ima sve različite nukleotide?
 c) Koliko od tih reči sadrži najmanje dve iste nukleotide?
 d) Verovatnoća da slučajno izabrana reč počinje adeninom i nema identičnih nukleotida.

Rešenje:

a) $N = 4^3 = \mathbf{64}$.

b) $N_{\text{razl}} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{24}$.

c) $N_{\text{bar 2 iste}} = N - N_{\text{razl}} = 64 - 24 = \mathbf{40}$.

d) Reč počinje A, sve različite: $1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$ povoljnih ishoda.

$$P = \frac{6}{64} = \frac{3}{32} \approx \mathbf{0,094}.$$

Zadatak 15. U medicinskom proučavanju vrši se eksperiment na 9 ljudi. Dva leka i placebo se testiraju – svaki na tačno 3 osobe, slučajnim redosledom. Koliko je takvih redosleda moguće?

Rešenje:

$$\binom{9}{3, 3, 3} = \frac{9!}{3! 3! 3!} = \frac{362880}{216} = \mathbf{1680}.$$

Zadatak 16. U laboratoriji je rođeno 500 miševa. Četvoro od njih ima defekt pri rođenju. Istraživači uzimaju 20 miševa za eksperiment.

- a) Odrediti verovatnoću da nije izabran nijedan defektni miš.
b) Odrediti verovatnoću da je izabran tačno jedan defektni miš.

Rešenje:

$N = 500$, $K = 4$ defektnih, $N - K = 496$ zdravih, $n = 20$. Hipergeometrijska raspodela:

$$P(X = k) = \frac{\binom{4}{k} \binom{496}{20-k}}{\binom{500}{20}}.$$

a) $k = 0$:

$$P(X = 0) = \frac{480 \cdot 479 \cdot 478 \cdot 477}{500 \cdot 499 \cdot 498 \cdot 497} \approx \mathbf{0,848}.$$

b) $k = 1$:

$$P(X = 1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{496}{19}}{\binom{500}{20}} \approx \mathbf{0,138}.$$

Provera: $0,848 + 0,138 = 0,986$ (ostatak su slučajevi sa ≥ 2 defektna miša).