

Име и презиме: \_\_\_\_\_

Максималан број поена је 5. У угластим заградама су наведени поени.

ЗАДАТАК 1. Применом еквивалентних трансформација, одредити дисјунктивну нормалну форму (ДНФ) формуле  $((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow (p_3 \Rightarrow \neg p_1)) \Rightarrow \neg(p_2 \Rightarrow p_3)$ .

Решење: [1 поен]

$$\begin{aligned}
 & ((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow (p_3 \Rightarrow \neg p_1)) \Rightarrow \neg(p_2 \Rightarrow p_3) \\
 & \equiv \neg(\neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee (\neg p_3 \vee \neg p_1)) \vee \neg(\neg p_2 \vee p_3) \dots [p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q] \\
 & \equiv (\neg\neg(\neg p_1 \vee p_2) \wedge \neg(\neg p_3 \vee \neg p_1)) \vee (\neg\neg p_2 \wedge \neg p_3) \dots [\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q] \\
 & \equiv ((\neg p_1 \vee p_2) \wedge \neg\neg p_3 \wedge \neg\neg p_1) \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \dots [\neg(p_1 q) \equiv \neg p \vee \neg q, \neg\neg p \equiv p] \\
 & \equiv ((\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_3 \wedge p_1) \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \dots [\neg\neg p \equiv p] \\
 & \equiv (\neg p_1 \wedge p_3 \wedge p_1) \vee (p_2 \wedge p_3 \wedge p_1) \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \dots [(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)] \\
 & \equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_2 \wedge \neg p_3) \dots [\neg p_1 \wedge p_1 \equiv 0, 0 \wedge p \equiv 0, 0 \vee p \equiv p \dots]
 \end{aligned}$$

ЗАДАТАК 2. Над алфабетом  $\{X, 0, 1, 2\}$ , где је  $X$  помоћни и полазни симбол, а  $0, 1$  и  $2$  су крајњи симболи, дата су правила:

$$X \rightarrow X0, X \rightarrow 1, X \rightarrow 2.$$

Доказати да је свака реч датог алфавета која се може извести из  $X$  облика  $X0^n$ ,  $10^n$  или  $20^n$ , за неко  $n \geq 0$ .

Решење: [1 поен]:

Нека је  $w$  реч која се може извести из  $X$ .  
 Претпоставимо да је дужина извођења  $k \geq 0$ .  
 Инд. по  $k$  доказујемо да  $w$  мора бити облика  $X0^n$ ,  $10^n$  или  $20^n$  за неко  $n \geq 0$ .  
 (Б)  $k=0$  Тада је  $w$  симбол  $X$ , тј.  $X0^n$  за  $n=0$ .  
 $k=1$  Тада је  $w$  реч  $X0$  или  $1$  или  $2$ , тј.  $X0^1, 10^0$  или  $20^0$ .  
 (ИП) Претпоставимо да је твђење тачно за речи чије је извођење из  $X$  дужине  $k$ .  
 Нека је дужина извођења речи  $w$  из  $X$  дужине  $k+1$ :  
 (\*)  $X \rightarrow w_1 \rightarrow \dots \rightarrow w_k \rightarrow w$ .  
 Према (ИП) реч  $w_k$  (претпоследња у извођењу (\*)) облика  $X0^n$  за неко  $n \geq 0$ .  $w_k$  не може бити облика  $10^n$  или  $20^n$  јер се на ове речи не може применити неко правило. У зависности од правила које је последње примењено у (\*) добијемо да је  $w$  облика  $X0^{n+1}$ ,  $10^n$  или  $20^n$  чиме је твђење доказано.

ЗАДАТАК 3. Сабирање природних бројева је дефинисано једнакостима (при чему је  $\bar{n}$  је следбеник броја  $n$ ):

$$(Rec1) \quad 0 + n = n$$

$$(Rec2) \quad \overline{m} + n = \overline{m + n}$$

Доказати да је  $(k + m) + n = k + (m + n)$ , за све природне бројеве  $k, m$  и  $n$ . Образложити сваки корак.

Доказ: [1 поен] *Индукцијом по  $k$ .*

$$(5u) \quad (0 + m) + n = m + n \quad (Rec1) \quad 0 + (m + n) = m + n \quad (Rec1)$$

$$\text{Дакле, } (0 + m) + n = 0 + (m + n).$$

$$(4u) \quad (k + m) + n = k + (m + n)$$

$$(k + m) + n \xrightarrow{Rec2} \overline{(k + m) + n} \xrightarrow{Rec2} \overline{(k + m) + n}$$

$$\xrightarrow{(4u)} \overline{k + (m + n)} \xrightarrow{Rec2} \overline{k + (m + n)}$$

ЗАДАТАК 4. Доказати  $p \Rightarrow q, \neg r \Rightarrow \neg q, s \Rightarrow t \vdash p \vee s \Rightarrow r \vee t$  користећи само основна правила природне дедукције. Сваки корак образложити.

|                                                                                                                                       |                                                                       |                                                                                                                   |                                                   |                                                                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} (\wedge^L_E)$                                                                                     | $\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta} (\wedge^D_E)$                      | $\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta} (\wedge^U)$                                                       | $\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} (\vee^L_U)$     | $\frac{\beta}{\alpha \vee \beta} (\vee^D_U)$                                                                           |
| $\frac{\alpha \vee \beta \quad \begin{array}{c c} \alpha & \beta \\ \vdots & \vdots \\ \gamma & \gamma \end{array}}{\gamma} (\vee_E)$ | $\frac{\alpha \quad \alpha \Rightarrow \beta}{\beta} (\Rightarrow_E)$ | $\frac{\begin{array}{c c} \alpha & \\ \vdots & \\ \beta & \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta} (\Rightarrow_U)$ | $\frac{\alpha \quad \neg \alpha}{\perp} (\neg_E)$ | $\frac{\begin{array}{c c} \alpha & \neg \alpha \\ \vdots & \vdots \\ \perp & \perp \end{array}}{\neg \alpha} (\neg_U)$ |
|                                                                                                                                       |                                                                       |                                                                                                                   |                                                   | $\frac{\perp}{\alpha} (\perp_C)$                                                                                       |

Доказ: [2 поена]

1.  $p \Rightarrow q$  прет.
2.  $\neg r \Rightarrow \neg q$  прет.
3.  $s \Rightarrow t$  прет.
4.  $p \vee s$  допета прет.
5.  $p$  допета прет.
6.  $q$   $\Rightarrow_E, 5, 1$
7.  $\neg r$  допета прет.
8.  $\neg q$   $\Rightarrow_E, 7, 2$
9.  $\perp$   $\neg_E, 6, 8$
10.  $r$   $\perp_C, 7-9$
11.  $r \vee t$   $\vee^L_U, 10$
12.  $s$  допета прет.
13.  $t$   $\Rightarrow_E, 12, 3$
14.  $r \vee t$   $\vee^D_U, 13$
15.  $r \vee t$   $\vee_E, 4, 5-11, 12-14$
16.  $p \vee s \Rightarrow r \vee t$   $\Rightarrow_U, 4-15$