

Име и презиме: _____

Максималан број поена је 5. У угластим заградама су наведени поени.

ЗАДАТАК 1. Применом еквивалентних трансформација, одредити конјунктивну нормалну форму (КНФ) формуле $\neg(p \wedge (q \vee r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$.

Решење: [1 поен]

$$\begin{aligned}
 & \neg(p \wedge (q \vee r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \vee r) \\
 & \equiv \neg \neg(p \wedge (q \vee r)) \vee ((p \wedge q) \vee r) \quad \dots [p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q] \\
 & \equiv (p \wedge (q \vee r)) \vee (p \wedge q) \vee r \quad \dots [\neg \neg p \equiv p] \\
 & \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge q) \vee r \quad \dots [p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)] \\
 & \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee r \quad \dots [p \wedge p \equiv p] \\
 & \equiv (p \wedge q) \vee r \quad \dots [(p \wedge r) \vee r \equiv r] \\
 & \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r) \quad \dots [(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)]
 \end{aligned}$$

ЗАДАТАК 2. Над алфабетом $\{S, x, o\}$, где је S помоћни и полазни симбол, а x и o су крајњи симболи, дата су правила:

$$S \rightarrow xSx, S \rightarrow o.$$

Доказати, да се за свако $n \geq 0$, речи $x^n S x^n$ и $x^n o x^n$ могу извести из S .

Решење: [1 поен]

Доказ индукцијом по n .

(БН) Речи $x^0 S x^0$ и $x^0 o x^0$, тј. S и o се могу извести из S .
 [Реч S се тривијално, без примене правила, изводи из S . Реч o се из S изводи применом правила $S \rightarrow o$.]

(ИП) Претпоставимо да се из S могу извести речи

$x^n S x^n$ и $x^n o x^n$ за неко $n \geq 0$.

Докажимо да се из S могу извести и речи $x^{n+1} S x^{n+1}$ и $x^{n+1} o x^{n+1}$.

Према (ИП) из S се може извести $x^n S x^n$. Када на ову реч применимо $S \rightarrow xSx$ добијемо $x^n x S x x^n$, тј. $x^{n+1} S x^{n+1}$. Дакле, применом правила $S \rightarrow o$ добијемо $x^{n+1} o x^{n+1}$. Дакле, из S се може извести и $x^{n+1} S x^{n+1}$ и $x^{n+1} o x^{n+1}$.

ЗАДАТАК 3. Сабирање природних бројева је дефинисано једнакостима (при чему је $\overline{m}$ је следбеник броја m):

$$(Rec1) \quad 0 + n = n$$

$$(Rec2) \quad \overline{m} + n = \overline{m + n}$$

Доказати да је $m + \overline{n} = \overline{m + n}$, за све природне бројеве m и n . Образложити сваки корак.

Доказ: [1 поен] Индукцијом по m .

$$(бн) \quad 0 + \overline{n} \stackrel{Rec1}{=} \overline{n}; \quad \overline{0} + n \stackrel{Rec2}{=} \overline{0 + n} \stackrel{Rec1}{=} \overline{n}; \quad \text{Дакле, } 0 + \overline{n} = \overline{0 + n}.$$

$$(ин) \quad m + \overline{n} = \overline{m + n}.$$

$$\overline{m + \overline{n}} \stackrel{Rec2}{=} \overline{\overline{m + \overline{n}} \stackrel{ин}{=} m + \overline{n}}} \stackrel{Rec2}{=} \overline{m + n} \stackrel{Rec2}{=} \overline{m + n}.$$

ЗАДАТАК 4. Доказати $p \wedge q \Rightarrow r, r \Rightarrow s, q \wedge \neg s \vdash \neg p$ користећи само основна правила природне дедукције. Сваки корак образложити.

$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} (\wedge^L_E)$	$\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta} (\wedge^D_E)$	$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta} (\wedge_U)$	$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} (\vee^L_U)$	$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta} (\vee^D_U)$	
$\frac{\alpha \vee \beta \quad \begin{array}{ c } \alpha \\ \vdots \\ \gamma \end{array} \quad \begin{array}{ c } \beta \\ \vdots \\ \gamma \end{array}}{\gamma} (\vee_E)$	$\frac{\alpha \quad \alpha \Rightarrow \beta}{\beta} (\Rightarrow_E)$	$\frac{\begin{array}{ c } \alpha \\ \vdots \\ \beta \end{array}}{\alpha \Rightarrow \beta} (\Rightarrow_U)$	$\frac{\alpha \quad \neg \alpha}{\perp} (\neg_E)$	$\frac{\begin{array}{ c } \alpha \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg \alpha} (\neg_U)$	$\frac{\begin{array}{ c } \neg \alpha \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\alpha} (\perp_C)$

Доказ: [2 поена]

1. $p \wedge q \Rightarrow r$ претпоставка
2. $r \Rightarrow s$ претпоставка
3. $q \wedge \neg s$ претпоставка
4. p доп. претп.
5. q $\wedge^L_E, 3$
6. $p \wedge q$ $\wedge^U, 4, 5$
7. r $\Rightarrow_E, 6, 1$
8. s $\Rightarrow_E, 7, 2$
9. $\neg s$ $\wedge^D_E, 3$
10. $\perp$ $\neg_E, 8, 9$
11. $\neg p$ $\neg_U, 4-10$