

УВОД У МАТЕМАТИЧКУ ЛОГИКУ

Небојша Икодиновић

СТРУКТУРА ИСПИТНОГ ЛИСТИЋА

1. (е) + (у): Једно од питања 1, 2, 3, 4, 5, 6 или 8;
2. (е) + (у): Једно од питања 9, 10, 11, 12, 13, 18 или 21;
3. (е)-део: једно од питања 14, 15, 16, 17
(у)-део: једно од питања 7, 19, 20, 22

Напомена: (е)-делови су елиминациони и оцењују се са 0 или 10 поена:

- 0 поена на (е)-деловима – испит није положен (без обзира на број поена на писменом);
- 10 поена на (е)-деловима – могућност да се закључи оцена без даљег одговарања под условом да је укупно остварено више од 50 поена (Тест 1 + Тест 2 + Писмени + 10 > 50) или наставак усменог одговарања на (у)-делове питања.

ИСПИТНА ПИТАЊА 2025/26

1. Исказне формуле

- (е) Задатак: Доказати да је (испитати да ли је) дата формула таутологија. **Нпр.** Испитати да ли је формула $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge \neg(r \vee s) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \wedge (s \Rightarrow q)$ таутологија. У случају да није таутологија, наћи валуацију за коју је нетачна.
- (у) Исказна алгебра; индуктивна дефиниција формула; задовољиве формуле; таутологије; важне таутологије

2. Еквивалентне трансформације

- (е) Задатак: Доказати логички идентитет; испитати еквивалентност формула; одредити кнф и днф формуле. **Нпр.** Одредити нормалне форме (кнф и днф) формуле:
 $((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow (p_3 \Rightarrow \neg p_1)) \Rightarrow (\neg p_2 \Rightarrow \neg p_3).$
- (у) Еквивалентне исказне формуле; теорема о замени еквивалената; нормалне форме

3. Принцип математичке индукције

- (е) Принцип математичке индукције; индуктивне дефиниције основних операција
- (у) Основне особине сабирања, множења, степеновања; докази основних особина

4. Формалне граматике

- (е) Задатак: Извођење у задатој формалној граматичи (палиндроми; бројевни изрази; исказне формуле). **Нпр.** Одредити граматичу чији је језик скуп свих исказних формула у којима се користе слова p_n , $n \geq 0$, логичка константа $\perp$ и везници $\neg$, $\Rightarrow$.
- (у) Појмови: алфабет, реч, правила за трансформацију; формална граматика; језик одређен формалном граматиком

5. Формалне теорије

- (е) Задатак: Извођење у задатој формалној теорији.
Нпр. Над алфабетом $\Sigma = \{F, P, I, x, y, z, /, \min, \max, \leq\}$, скуп формула је одређен правилима:
 $P \rightarrow x \mid y \mid z \mid P/ \quad I \rightarrow P \mid \min(I, I) \mid \max(I, I) \quad F \rightarrow I \leq I$

Аксиоме су формуле облика $A \leq A$, за било који израз A .

Правила извођења су:

$$\frac{A \leq C}{\min(A, B) \leq C} (\min_L) \quad \frac{A \leq C \quad B \leq C}{\max(A, B) \leq C} (\max_L) \quad \frac{\min(A, B) \leq C}{\min(B, A) \leq C} (\min_K)$$

$$\frac{A \leq B \quad A \leq C}{A \leq \min(B, C)} (\min_D) \quad \frac{A \leq B}{A \leq \max(B, C)} (\max_D) \quad \frac{A \leq \max(B, C)}{A \leq \max(C, B)} (\max_K)$$

$$\frac{A \leq B \quad B \leq C}{A \leq C} (T)$$

Доказати $\vdash x \leq \min(x, \max(x, y))$.

- (u) формалне теорије; извођење у формалној теорији; извођење из хипотеза у формалној теорији

6. Исказни рачун $\mathbb{L}$

- (e) Формална теорија $\mathbb{L}$: алфабет; формуле; аксиоме; правила извођења; пример извођења у $\mathbb{L}$.
Нпр. Доказати (уз евентуалну примену теореме дедукције) $\vdash_{\mathbb{L}} \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta))$.

- (u) Теорема сагласности; теорема дедукције; докази теорема

7. Потпуност исказног рачуна $\mathbb{L}$

- (u) Теорема потпуности; доказ теореме потпуности

8. Природна дедукција у исказној логици

- (e) Задатак: Доказати секвент применом правила природне дедукције. **Нпр.** Користећи само основна правила природне дедукције, доказати: $\vdash (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q)$.

- (u) Основна и изведена правила природне дедукције

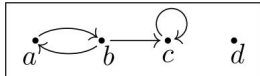
9. Чист предикатски језик [Презентација са предавања]

http://old.matf.bg.ac.rs/p/files/43-Presentacija_uml_15_11_2024.pdf

- (e) Задатак: Истинитост формула (реченица) при валуацијама над коначним универзумом.

Нпр. На универзуму који чине a, b, c, d , дефинисан је бинарни предикат:

$E(x, y)$ – 'из x иде стрелица ка y '



- (a) Одредити формулу $\alpha(x)$, без употребе симбола $=$, која је тачна само када променљива x добије неку од вредности a, b и c (а нетачна је за d).

- (b) Испитати тачност реченица $\exists x \forall y \neg E(x, y)$ и $\forall x (E(x, x) \wedge \neg \exists y E(y, x) \Rightarrow \forall z E(x, z))$

- (u) Чист предикатски језик: нелогички и логички симболи; атомске и предикатске формуле; истинитосна вредност формуле

10. Правила природне дедукције за квантификаторе

- (e) Задатак: Доказати секвент применом правила природне дедукције.

Нпр. Доказати $\forall x ((A(x) \Rightarrow R(x)) \vee T(x)), \exists x (T(x) \Rightarrow P(x)), \forall x (A(x) \wedge \neg P(x)) \vdash \exists x R(x)$.

- (u) Основна и изведена правила природне дедукције за квантификаторе; теореме предикатске логики

11. Аксиоме екстензионалности, празног скупа, пара, уније и партитивног скупа; схема издвајања

- (е) Аксиоме екстензионалности, празног скупа, пара, уније и партитивног скупа; схема издвајања; инклузија међу скуповима; питања и задаци о једноставним последицама аксиома. **Нпр.** Која од следећих тврђења су тачна, за све a, b, c ?

- (а) Ако $a \in b$ и $b \in c$, онда $a \in c$.
 (б) Ако $a \in b$ и $b \subseteq c$, онда $a \in c$.
 (в) Ако $a \subseteq b$ и $b \in c$, онда $a \in c$.
 (г) Ако $a \subseteq b$ и $b \subseteq c$, онда $a \subseteq c$.

Образложити одговоре.

- (у) Егзистенција и јединственост скупова; непостојање скупа свих скупова; пресек непразног скупа

12. Булове операције и Декартов производ

- (е) Питања и задаци о једноставним особинама Булових операција и Декартовог производа. **Нпр.** Доказати да за све скупове X и Y важи $\mathcal{P}(X \cap Y) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$.
 (у) Унија, пресек, разлика скупова; уређен пар, тројка, ...; Декартов производ (егзистенција и јединственост)

13. Релације и функције; композиције

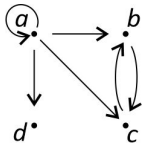
- (е) Дефиниције и основни примери; композиција релација; композиција две функције (доказ)
 (у) особине композиције (асоцијативност композиције)

14. Инверзне релације; 1-1 и на функције; бијекције

- (е) Дефиниције и основна тврђења

15. Особине бинарних релација;

- (е) Дефиниције: рефлексивне, ирефлексивне, симетричне, антисиметричне, транзитивне, линеарне релације. Задатак: испитати да ли задата релација има наведене особине. **Нпр.** Испитати да ли је приказана релација: рефлексивна, ирефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна, линеарна.



16. Релације еквиваленције

- (е) Дефиниција релације еквиваленције; класе еквиваленције; количнички скуп; особине класа еквиваленције и докази тих особина

17. Релације уређења

- (е) Строга, парцијална, линеарна уређења; веза између строгих уређења и парцијалних уређења (доказ)

Белешке са предавања за питања 18-22:

http://old.matf.bg.ac.rs/p/files/43-UML_25_26_beleske.pdf

18. Директне и индиректне слике

- (e) Задатак: Одредити директне и индиректне слике дате функције Нпр. Одредити директне и индиректне слике функције $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$ дате са $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & c & a \end{pmatrix}$.
- (u) Директне и индиректне слике; особине и докази особина
- 19.** Схема замене; аксиома регуларности; аксиома бесконачности; скуп природних бројева
- (u) Схема замене; аксиома регуларности; аксиома бесконачности; индуктиван скуп; најмањи индуктиван скуп-
- 20.** Уређење и аритметичке операције скупа $\mathbb{N}$
- (u) Уређење природних бројева; принцип потпуне индукције и последице (добро уређење); принцип рекурзије (без доказа); индуктивне дефиниције сабирања, множења и степеновања
- 21.** Коначни скупови; Дирихлеов принцип
- (e) Дирихлеов принцип (формулација) и последице; појам коначног скупа и основне особине
- (u) Доказ Дирихлеовог принципа
- 22.** бесконачни скупови; теорема $|A| < |\mathcal{P}(A)|$
- (u) Упоредба скупова по кардиналности; основна својства; доказ да је $|A| < |\mathcal{P}(A)|$; пребројиви и небројиви скупови