

УВОД У МАТЕМАТИЧКУ ЛОГИКУ

Небојша Икодиновић

СТРУКТУРА ИСПИТНОГ ЛИСТИЋА

1. (е) + (у): Једно од питања 1, 2, 3, 4, 5, 6 или 8;
2. (е) + (у): Једно од питања 9, 10, 11, 12, 13, 18 или 21;
3. (е)-део: једно од питања 14, 15, 16, 17
(у)-део: једно од питања 7, 19, 20, 22

Напомена: (е)-делови су елиминациони и оцењују се са 0 или 10 поена:

- 0 поена на (е)-деловима – испит није положен (без обзира на број поена на писменом);
- 10 поена на (е)-деловима – могућност да се закључи оцена без даљег одговарања под условом да је укупно остварено више од 50 поена (Тест + Писмени + 10 > 50) или наставак усменог одговарања на (у)-делове питања.

ИСПИТНА ПИТАЊА 2024/25

1. Исказне формуле

- (е) Задатак: Доказати да је (испитати да ли је) дата формула таутологија. **Нпр.** Испитати да ли је формула $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge \neg(r \vee s) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \wedge (s \Rightarrow q)$ таутологија. У случају да није таутологија, наћи валуацију за коју је нетачна.
- (у) Исказна алгебра; индуктивна дефиниција формула; дрво формуле; потформуле; валуације; задовољиве формуле; таутологије; важне таутологије

2. Еквивалентне трансформације

- (е) Задатак: Доказати логички идентитет; испитати еквивалентност формула; одредити кнф и днф формуле. **Нпр.** Одредити нормалне форме (кнф и днф) формуле:
 $((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow (p_3 \Rightarrow \neg p_1)) \Rightarrow (\neg p_2 \Rightarrow \neg p_3).$
- (у) Еквивалентне исказне формуле; теорема о замени еквивалената; нормалне форме

3. Принцип математичке индукције

- (е) Принцип математичке индукције; индуктивне дефиниције основних операција
- (у) Основне особине сабирања, множења, степеновања; докази основних особина

4. Формалне граматике

- (е) Задатак: Извођење у задатој формалној граматичи (палиндроми; бројевни изрази; исказне формуле). **Нпр.** Одредити граматичу чији је језик скуп свих исказних формула у којима се користе слова p_n , $n \geq 0$, логичка константа $\perp$ и везници $\neg$, $\Rightarrow$.
- (у) Појмови: алфабет, реч, правила за трансформацију; формална граматика; језик одређен формалном граматиком

5. Формалне теорије

- (е) Задатак: Извођење у задатој формалној теорији.
- Нпр.** Над алфабетом $\Sigma = \{F, P, I, x, y, z, /, \min, \max, \leq\}$, скуп формула је одређен правилима:
 $P \rightarrow x \mid y \mid z \mid P/ \quad I \rightarrow P \mid \min(I, I) \mid \max(I, I) \quad F \rightarrow I \leq I$

Аксиоме су формуле облика $A \leq A$, за било који израз A .

Правила извођења су:

$$\begin{array}{c} \frac{A \leq C}{\min(A, B) \leq C} (\min_L) \quad \frac{A \leq C \quad B \leq C}{\max(A, B) \leq C} (\max_L) \quad \frac{\min(A, B) \leq C}{\min(B, A) \leq C} (\min_K) \\ \frac{A \leq B \quad A \leq C}{A \leq \min(B, C)} (\min_D) \quad \frac{A \leq B}{A \leq \max(B, C)} (\max_D) \quad \frac{A \leq \max(B, C)}{A \leq \max(C, B)} (\max_K) \\ \frac{A \leq B \quad B \leq C}{A \leq C} (T) \end{array}$$

Доказати $\vdash x \leq \min(x, \max(x, y))$.

- (u) формалне теорије; извођење у формалној теорији; извођење из хипотеза у формалној теорији

6. Исказни рачун $\mathbb{L}$

- (e) Формална теорија $\mathbb{L}$: алфабет; формуле; аксиоме; правила извођења; пример извођења у $\mathbb{L}$.
Нпр. Доказати (уз евентуалну примену теореме дедукције) $\vdash_{\mathbb{L}} \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta))$.

- (u) Теорема сагласности; теорема дедукције; докази теорема

7. Потпуност исказног рачуна $\mathbb{L}$

- (u) Теорема потпуности; доказ теореме потпуности

8. Природна дедукција у исказној логици

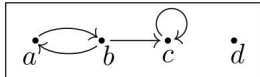
- (e) Задатак: Доказати секвент применом правила природне дедукције. **Нпр.** Користећи само основна правила природне дедукције, доказати: $\vdash (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q)$.

- (u) Основна и изведена правила природне дедукције

9. Чист предикатски језик

- (e) Задатак: Истинитост формула (реченица) при валуацијама над коначним универзумом.
Нпр. На универзуму који чине a, b, c, d , дефинисан је бинарни предикат:

$E(x, y)$ — 'из x иде стрелица ка y '



- (a) Одредити формулу $\alpha(x)$ која је тачна само када променљива x добије неку од вредности a, b и c (а нетачна је за d).

- (b) Испитати тачност реченица $\exists x \forall y \neg E(x, y)$ и $\forall x (E(x, x) \wedge \neg \exists y E(y, x) \Rightarrow \forall z E(x, z))$

- (u) Чист предикатски језик: нелогички и логички симболи; атомске и предикатске формуле; истинитосна вредност формуле

10. Правила природне дедукције за квантификаторе

- (e) Задатак: Доказати секвент применом правила природне дедукције.

Нпр. Доказати $\forall x ((A(x) \Rightarrow R(x)) \vee T(x)), \exists x (T(x) \Rightarrow P(x)), \forall x (A(x) \wedge \neg P(x)) \vdash \exists x R(x)$.

- (u) Основна и изведена правила природне дедукције за квантификаторе; теореме предикатске логики

11. Аксиоме екстензионалности, празног скупа, пара, уније и партитивног скупа; схема издвајања

- (е) Аксиоме екстензионалности, празног скупа, пара, уније и партитивног скупа; схема издвајања; инклузија међу скуповима; питања и задаци о једноставним последицама аксиома. **Нпр.** Која од следећих тврђења су тачна, за све a, b, c ?

- (а) Ако $a \in b$ и $b \in c$, онда $a \in c$.
 (б) Ако $a \in b$ и $b \subseteq c$, онда $a \in c$.
 (в) Ако $a \subseteq b$ и $b \in c$, онда $a \in c$.
 (г) Ако $a \subseteq b$ и $b \subseteq c$, онда $a \subseteq c$.

Образложити одговоре.

- (у) Егзистенција и јединственост скупова; непостојање скупа свих скупова; пресек непразног скупа

12. Булове операције и Декартов производ

- (е) Питања и задаци о једноставним особинама Булових операција и Декартовог производа.

Нпр. Доказати да за све скупове X и Y важи $\mathcal{P}(X \cap Y) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$.

- (у) Унија, пресек, разлика скупова и везе са инклузијом; Де Морганови закони; уређен пар, тројка, четворка, ...; Декартов производ (егзистенција и јединственост)

13. Релације и функције; композиције

- (е) Дефиниције и основни примери; композиција релација; композиција две функције (доказ)

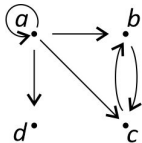
- (у) особине композиције (композиције са дијагоналом, асоцијативност композиције)

14. Инверзне релације; 1-1 и на функције; бијекције

- (е) Дефиниције и основни примери

15. Особине бинарних релација;

- (е) Дефиниције: рефлексивне, ирефлексивне, симетричне, антисиметричне, транзитивне, линеарне релације. Задатак: испитати да ли задата релација има наведене особине. **Нпр.** Испитати да ли је приказана релација: рефлексивна, ирефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна, линеарна.



16. Релације еквиваленције

- (е) Дефиниција релације еквиваленције; класе еквиваленције; количнички скуп; особине класа еквиваленције и докази тих особина

17. Релације уређења

- (е) Строга, парцијална, линеарна уређења; веза између строгих и парцијалних уређења (доказ); највећи, најмањи, максимални, минимални елементи

18. Директне и индиректне слике

- (е) Задатак: Одредити директне и индиректне слике дате функције **Нпр.** Одредити директне и индиректне слике функције $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$ дате са $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & c & a \end{pmatrix}$.

- (u) Директне и индиректне слике; особине и докази особина
- 19.** Схема замене; аксиома регуларности; аксиома бесконачности; скуп природних бројева
- (u) Схема замене; аксиома регуларности; аксиома бесконачности; индуктиван скуп; најмањи индуктиван скуп; доказ и примена принципа математичке индукције
- 20.** Уређење и аритметичке операције скупа $\mathbb{N}$
- (u) Уређење природних бројева; принцип потпуне индукције и последице (добро уређење); принцип рекурзије (без доказа); индуктивне дефиниције сабирања, множења и степеновања
- 21.** Коначни скупови; Дирихлеов принцип
- (e) Дирихлеов принцип (формулација) и последице; појам коначног скупа и основне особине
- (u) Доказ Дирихлеовог принципа
- 22.** бесконачни скупови; теорема $|A| < |\mathcal{P}(A)|$
- (u) Упоредба скупова по кардиналности; основна својства; доказ да је $|A| < |\mathcal{P}(A)|$; пребројиви и небројиви скупови

ИСПИТНА ПИТАЊА 2023/24

1. Исказне формуле

(е) Задатак: Доказати да је/испитати да ли је дата формула таутологија.

Доказати да су следеће формуле таутологије:

(а) $p \vee \neg((q \Rightarrow p) \wedge q)$

(б) $((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow p_3) \Rightarrow ((p_3 \Rightarrow p_1) \Rightarrow (p_4 \Rightarrow p_1))$

(в) $((((p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg s)) \Rightarrow r) \Rightarrow t) \Rightarrow ((t \Rightarrow p) \Rightarrow (s \Rightarrow p))$

Испитати да ли су следеће формуле таутологије. У случају да формула није таутологија, наћи валуацију за коју је нетачна.

(а) $(p \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow \neg p$

(б) $p \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$

(в) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow q) \Rightarrow p$

(г) $p \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)))$

(д) $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \vee r \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p))$

(ђ) $((p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s) \wedge \neg(r \vee s)) \Rightarrow ((r \Rightarrow p) \wedge (s \Rightarrow q))$

(е) $(p \Rightarrow (\neg q \vee (r \vee s))) \wedge \neg(p \Rightarrow s) \Rightarrow \neg q$

(ж) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \wedge (p \wedge r \Rightarrow \neg s) \Rightarrow (p \wedge s \Rightarrow \neg q)$

(у) Исказна алгебра; индуктивна дефиниција формула; дрво формуле и потформуле; валуације; задовољиве формуле; таутологије; важне таутологије

2. Еквивалентне трансформације

(е) Задатак: Доказати логички идентитет; испитати еквивалентност формула

Да ли су еквивалентне формуле:

(а) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$ и $\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$;

(б) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$ и $\alpha \Rightarrow (\gamma \Rightarrow \beta)$;

(в) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$ и $\gamma \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$;

(г) $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$ и $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma$?

Доказати следеће идентитете:

(а) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee s)$

(б) $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge s)$

(в) $p \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \vee q$

(г) $p \wedge (\neg p \vee q) \equiv p \wedge q$

(д)¹ $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p) \equiv (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$

(ђ) $\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee q) \equiv \neg q$

(е) $\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \equiv \neg q$

(ж) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

¹ Дедекиндов идентитет. Рихард Дедекинд (1831–1916), немачки математичар

Упростити исказну формулу (наћи формулу најмање сложености која је еквивалентна датој формули):

(а) $(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

(б) $p \vee (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (\neg p \wedge r)$

(в) $((p \vee q) \wedge ((\neg p \wedge \neg q) \vee r)) \vee \neg r) \wedge q$

Одредити нормалне форме (кнф и днф) формуле:

(а) $((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow (p_3 \Rightarrow \neg p_1)) \Rightarrow (\neg p_2 \Rightarrow \neg p_3)$

$$(б) \neg(p_1 \wedge (p_2 \vee p_3)) \Rightarrow ((p_1 \wedge p_2) \vee p_3)$$

$$(в) \neg(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)$$

$$(г) (p \Leftrightarrow q) \wedge \neg(r \Rightarrow s)$$

$$(д) ((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow r) \wedge (p \vee \neg q)$$

$$(ђ) \neg((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow r))$$

(у) еквивалентне формуле; теорема о замени еквивалената; нормалне форме

3. Принцип математичке индукције

(е) Принцип математичке индукције; индуктивне дефиниције основних операција

(у) Основне особине сабирања, множења, степеновања; докази

4. Формалне граматике

(е) Задатак: Извођење у задатој формалној граматичи (палиндроми; бројевни изрази; исказне формуле)

Над алфабетом $\{S, a, b\}$, где је S полазни симбол, а a, b терминали, дата су правила

$$S \rightarrow aS \quad S \rightarrow b$$

Доказати да се из S могу извести само речи $a^n b$ или $a^n S$, за било које $n \geq 0$.

Над алфабетом $\{a, b, S\}$ дата су правила: $S \rightarrow aSb$ и $S \rightarrow \cdot$. Доказати да се из S може извести реч w ако је w облика $a^n b^n$ или $a^n S b^n$, $n \geq 0$.

Над алфабетом $\{a, b, X, Y\}$ дата су правила:

$$X \rightarrow aaYb \quad Y \rightarrow aaYb \quad Y \rightarrow \cdot$$

Описати скуп свих речи које се могу извести из X .

Одредити граматичу чији је језик скуп свих палиндрома над алфабетом $\{a, b\}$.

Одредити граматичу чији је језик скуп свих исказних формула у којима се користе слова p_n , $n \geq 0$, логичка константа $\perp$ и везници $\neg, \Rightarrow$.

(у) Појмови: алфабет, реч, правила за трансформацију; језик одређен формалном граматиком

5. Формалне теорије

(е) Задатак: Извођење у задатој формалној теорији.

Формална теорија $\mathcal{F}$ је одређена на следећи начин:

- алфабет садржи три симбола, $\{ |, *, = \}$;
- формуле су све речи облика $x * y = z$, где су x, y, z речи записане само симболом $|$;
- једина аксиома је формула $|| * | = |$;
- правила извођења су:

$$(R1) \frac{x * y = z}{x | * y = z} \quad (R2) \frac{x * y = z |}{x * y | = z}$$

(а) Доказати $\vdash_{\mathcal{F}} |||| * || = ||$.

(б) Ако је $\vdash_{\mathcal{F}} \underbrace{|| \dots |}_{73 \text{ пута}} * \underbrace{|| \dots |}_{37 \text{ пута}} = \underbrace{|| \dots |}_k$, одредити k .

Формална теорија $\mathcal{F}$ је одређена на следећи начин:

- алфабет садржи три симбола, $\{ |, *, = \}$;

- формуле су све речи облика $x * y = z$, где су x, y, z речи записане само симболом $|$;
- једина аксиома је формула $| * |=|$;
- правила извођења су:

$$(R1) \frac{x * y = z}{x * y| = zx} \quad (R2) \frac{x * y = z}{y * x = z}$$

(а) Доказати $\vdash_{\mathcal{F}} ||| * || = ||| |||$.

(б) Ако је $\vdash_{\mathcal{F}} \underbrace{|| \dots |}_{20 \text{ пута}} * \underbrace{|| \dots |}_{22 \text{ пута}} = \underbrace{|| \dots |}_k$, одредити k .

Нека је дата формална теорија:

- $\Sigma = \{a, b, c, d, =\}$
- формуле су речи облика $x = y$, при чему $x, y \in \{a, b, c, d\}$
- $\Delta x = \emptyset$
- $\mathcal{P}$ чине два правила извођења:

$$(S) : \frac{x = y}{y = x} \quad (T) : \frac{x = y \quad y = z}{x = z}.$$

Доказати:

(а) $a = b, b = c, c = d \vdash d = a$

(б) $a = d, c = d \vdash c = a$

(в) $b = a, c = a \vdash a = a$

Над алфабетом $\Sigma = \{F, P, I, x, y, z, /, \min, \max, \leq\}$, скуп формула је изграђен следећим правилима:

- $P \rightarrow x | y | z | P/$ (у формулама се појављују променљиве, $x, y, z, x/, y/, z/, x//, y//, z//, \dots$, које ћемо краће означавати $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$)
- $I \rightarrow P | \min(I, I) | \max(I, I)$ (у грађењу формула учествују изрази, изграђени од променљивих и операција $\min$ и $\max$)
- $F \rightarrow I \leq I$ (формуле су облика $A \leq B$, где су A и B неки изрази.) Аксиоме су формуле облика $A \leq A$, за било који израз A . Правила извођења су:

$$\frac{A \leq C}{\min(A, B) \leq C} (\min_L) \quad \frac{A \leq B \quad A \leq C}{A \leq \min(B, C)} (\min_D)$$

$$\frac{A \leq C \quad B \leq C}{\max(A, B) \leq C} (\max_L) \quad \frac{A \leq B}{A \leq \max(B, C)} (\max_D)$$

$$\frac{\min(A, B) \leq C}{\min(B, A) \leq C} (\min_K) \quad \frac{A \leq \max(B, C)}{A \leq \max(C, B)} (\max_K)$$

$$\frac{A \leq B \quad B \leq C}{A \leq C} (T)$$

Доказати:

(а) $\vdash x \leq \min(x, \max(x, y))$

(б) $\vdash \max(x, \min(x, y)) \leq x$

(в) $\vdash \max(x, \min(y, z)) \leq \min(\max(x, y), \max(x, z))$

(г) $\vdash \min(x, \max(y, z)) \leq \max(\min(x, y), \min(x, z))$

(u) формалне теорије; извођење у формалној теорији; извођење из хипотеза у формалној теорији

6. Исказни рачун $\mathbf{L}$

(е) Формална теорија $\mathbf{L}$: алфабет; формуле; аксиоме; правила извођења; пример извођења у $\mathbf{L}$

Доказати (уз евентуалну примену теореме дедукције):

$$(a) \vdash_{\mathbf{L}} (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow \neg\alpha)$$

$$(b) \vdash_{\mathbf{L}} (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow (\beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta))$$

$$\alpha, \neg\alpha \vdash_{\mathbf{L}} \beta$$

(u) Теорема сагласности; теорема дедукције; докази

7. Потпуност исказног рачуна $\mathbf{L}$

(u) Теорема потпуности; доказ теореме потпуности

8. Природна дедукција у исказној логици

(е) Задатак: Доказати секвент применом правила природне дедукције.

Користећи само основна правила природне дедукције, доказати:

$$(a) p \wedge q \Rightarrow r, r \Rightarrow s, q \wedge \neg s \vdash \neg p$$

$$(b) p, p \vee q \Rightarrow \neg s, r \Rightarrow s \vdash \neg r$$

$$(в) p \vee q, p \vee r, \neg q \vee \neg r \vdash p$$

$$(г) \neg p \vee r, \neg q \vee r, p \vee q \vdash r$$

$$(д) \vdash p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

$$(ђ) \vdash (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r)$$

$$(е) \vdash (p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \Rightarrow q)$$

$$(ж) p \Rightarrow q, p \wedge q \Rightarrow r \vdash p \Rightarrow r$$

$$(з) p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \vdash p \wedge q \Rightarrow r$$

$$(и) p \Rightarrow q \vdash \neg(p \wedge \neg q)$$

Доказати следеће секвенте:

$$(a) \neg p \Rightarrow q, \neg p \vee (\neg q \Rightarrow r), \neg q \vdash r$$

$$(b) \neg p \vee q \Rightarrow r, s \vee \neg q, \neg t, p \Rightarrow t, \neg p \wedge r \Rightarrow \neg s \vdash \neg q$$

$$(в) p \wedge q \Rightarrow r, r \Rightarrow s, q \wedge \neg s \vdash \neg p$$

$$(г) p \Rightarrow q, r \vee s, \neg s \Rightarrow \neg t, \neg q \vee s, \neg s, \neg p \wedge r \Rightarrow u, w \vee t \vdash u \wedge w$$

$$(д) c \vee e \Rightarrow \neg m, r \Rightarrow m, c \vdash \neg r$$

$$(ђ) \neg a \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c), c \Rightarrow \neg a, \neg d \vee a \Rightarrow c, \neg d \vdash \neg b$$

$$(е) e \Rightarrow f, \neg g \Rightarrow \neg f, h \Rightarrow i, e \vee h \vdash g \vee i$$

Доказати:

$$(\mathbf{A}^\vee) \vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$$

$$(\mathbf{A}^\wedge) \vdash \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$$

$$(\mathbf{K}^\vee) \vdash \alpha \vee \beta \Leftrightarrow \beta \vee \alpha$$

$$(\mathbf{K}^\wedge) \vdash \alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \beta \wedge \alpha$$

$$(\mathbf{D}_\wedge^\vee) \vdash \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

$$(\mathbf{D}_\vee^\wedge) \vdash \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

$$(\mathbf{C}^\vee) \vdash \alpha \vee \neg\alpha \Leftrightarrow \top$$

$$(\mathbf{C}^\wedge) \vdash \alpha \wedge \neg\alpha \Leftrightarrow \perp$$

$$(\mathbf{N}^\vee) \vdash \alpha \vee \perp \Leftrightarrow \alpha$$

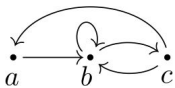
$$(\mathbf{N}^\wedge) \vdash \alpha \wedge \top \Leftrightarrow \alpha$$

(u) Основна и изведена правила природне дедукције

9. Чист предикатски језик

(е) Задатак: Истиност формула/реченица при валуацијама над коначним универзумом.

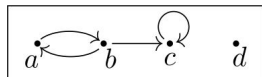
Над универзумом који чине три објекта a , b и c , задат је бинарни предикат: $R(x, y)$ – 'из x иде стрелица ка y '.



За сваку од формула $\alpha(x)$ навести за које вредности x је тачна.

$\alpha(x)$	је тачно када x добије вредност:
$\neg R(x, x)$	a, c
$\forall y R(y, x)$	
$\exists y (R(y, x) \wedge R(y, y))$	
$\exists y (R(y, x) \wedge R(x, y))$	
$R(x, x) \Rightarrow \forall y R(x, y)$	

На универзуму од четири објекта, a, b, c, d , дефинисан је бинарни предикат:



$E(x, y)$ — 'из x иде стрелица ка y '

(а) Одредити формулу $\alpha(x)$ која ће бити тачна само када променљива x добије неку од вредности:

- a, b и c (а нетачна је за d); • a, c и d (а нетачна је за b);
- b и c (а нетачна је за a и d); • a и b (а нетачна је за c и d).

(б) Испитати тачност следећих реченица:

- $\exists x \forall y \neg E(x, y)$ • $\forall x (E(x, x) \wedge \neg \exists y E(y, x) \Rightarrow \forall z E(x, z))$
- $\forall x (\neg \exists y E(x, y) \Rightarrow \neg E(x, x))$ • $\forall x (\exists y E(x, y) \Rightarrow \exists z E(y, z))$

(у) Алфабет: нелогички и логички симболи; атомске и предикатске формуле; истинитосна вредност формуле

10. Правила природне дедукције за квантификаторе

(е) Задатак: Доказати секвент применом правила природне дедукције.

Доказати

- (а) $\forall x (\text{Kos}(x) \Rightarrow \text{Ptica}(x)), \neg \text{Ptica}(\text{Dambo}) \vdash \neg \text{Kos}(\text{Dambo})$
- (б) $\forall x (\text{Macka}(x) \Rightarrow \text{Lovac}(x)), \forall x (\text{Lav}(x) \Rightarrow \text{Macka}(x)) \vdash \forall x (\neg \text{Lovac}(x) \Rightarrow \neg \text{Lav}(x))$
- (в) $\forall x (\text{Kelt}(x) \Rightarrow \neg \text{Got}(x)), \forall x (\text{Gal}(x) \Rightarrow \text{Kelt}(x)) \vdash \forall x (\text{Got}(x) \Rightarrow \neg \text{Gal}(x))$

Доказати секвенте:

- (а) $\vdash \forall x (A(x) \Rightarrow A(x))$
- (б) $\forall x (A(x) \Rightarrow B(x)), \forall x (B(x) \Rightarrow A(x)) \vdash \forall x (A(x) \Leftrightarrow B(x))$
- (в) $\vdash \forall x (A(x) \Leftrightarrow A(x))$
- (г) $\forall x (A(x) \Leftrightarrow B(x)) \vdash \forall x (B(x) \Leftrightarrow A(x))$
- (д) $\forall x (A(x) \Leftrightarrow B(x)), \forall x (B(x) \Leftrightarrow C(x)) \vdash \forall x (A(x) \Leftrightarrow C(x))$
- (ђ) $\forall x \neg P(x) \vdash \forall x (P(x) \Rightarrow A(x))$
- (е) $\forall x \neg P_1(x), \forall x \neg P_2(x) \vdash \forall x (P_1(x) \Leftrightarrow P_2(x))$

Доказати:

- (а) $\forall x (A(x) \Rightarrow B(x)), \exists x \neg B(x) \vdash \exists x \neg A(x)$
- (б) $\forall x (A(x) \vee B(x) \Rightarrow C(x)), \exists x \neg C(x) \vdash \exists x \neg A(x)$
- (в) $\forall x (C(x) \Rightarrow A(x)), \forall x (\neg B(x) \Rightarrow C(x)) \vdash \forall x (A(x) \vee B(x))$
- (г) $\forall x (N(x) \wedge S(x) \Rightarrow C(x)), \forall x (T(x) \Rightarrow N(x)), \exists x (T(x) \wedge \neg C(x)) \vdash \exists x \neg S(x)$
- (д) $\forall x (N(x) \Rightarrow B(x)), \exists x (N(x) \wedge D(x)) \vdash \exists x (B(x) \wedge D(x))$

- (ђ) $\forall x((A(x) \Rightarrow R(x)) \vee T(x)), \exists x(T(x) \Rightarrow P(x)), \forall x(A(x) \wedge \neg P(x)) \vdash \exists xR(x)$
 (е) $\forall x\exists y(E(x) \Rightarrow M(x) \vee N(y)), \neg\forall xM(x), \forall xE(x) \vdash \exists xN(x)$
 (ж) $\forall x\exists y(P(x) \Rightarrow P(y))$
 (з) $\exists x\forall y(M(x) \wedge (D(y) \Rightarrow V(x, y))), \forall x\forall y(\neg M(x) \vee \neg V(x, y)) \vdash \forall x\neg D(x)$
 (и) $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \vdash \forall x(\exists y(A(y) \wedge C(x, y)) \Rightarrow \exists y(B(y) \wedge C(x, y)))$
 (ј) $\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \Rightarrow H(x, y))), \forall x(F(x) \Rightarrow \forall y(B(y) \Rightarrow \neg H(x, y))) \vdash \forall x(G(x) \Rightarrow \neg B(x))$
 (к) $\exists x\exists y(A(x) \wedge A(y) \wedge \neg R(x, y)), \forall x\forall y(B(x) \wedge B(y) \Rightarrow R(x, y)) \vdash \exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$
 (л) $\exists xA(x), \forall y(A(y) \Rightarrow \exists z B(y, z)), \forall x\forall y(B(x, y) \Rightarrow B(y, x)) \vdash \exists x\exists y(B(x, y) \wedge A(y))$
 (љ) $\forall x\forall y(B(x, y) \Rightarrow B(y, x) \vee B(y, y)), \forall u(\exists v B(u, v) \Rightarrow C(u)), \forall w\exists z B(z, w) \vdash \forall z C(z)$

Нека је R бинарни предикатски симбол. Доказати секвенце:

- (а) $\forall xB(x, x) \vdash \forall x\exists yB(x, y)$
 (б) $\forall x\forall y(R(x, y) \Rightarrow \neg R(y, x)) \vdash \forall x\neg R(x, x)$
 (в) $\forall x\neg R(x, x), \forall x\forall y\forall z(R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)) \vdash \forall x\forall y(R(x, y) \Rightarrow \neg R(y, x))$
 (г) $\forall x\forall y\forall z(R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow \neg R(x, z)) \vdash \forall x\neg R(x, x)$
 (д) $\forall x\exists yR(x, y), \forall x\forall y(R(x, y) \Rightarrow R(y, x)), \forall x\forall y\forall z(R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z)) \vdash \forall xR(x, x)$
 (у) Основна и изведена правила природне дедукције за квантификаторе; теореме предикатске логики

11. Aksiome теорије скупова: екстензионалности, празног скупа, пара, уније и партитивног скупа; схема издвајања

- (е) Aksiome екстензионалности, празног скупа, пара, уније и партитивног скупа; схема издвајања; инклузија међу скуповима; питања и задаци о једноставним последицама аксиома

Која од следећих тврђења су тачна, за све a, b, c ?

- (а) Ако $a \in b$ и $b \in c$, онда $a \in c$.
 (б) Ако $a \in b$ и $b \subseteq c$, онда $a \in c$.
 (в) Ако $a \subseteq b$ и $b \in c$, онда $a \in c$.
 (г) Ако $a \subseteq b$ и $b \subseteq c$, онда $a \subseteq c$.

Одредити следеће скупове:

- (а) $\cup\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\emptyset\}\}\}$
 (б) $\cap\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\}$

Ако је $a \subseteq b$, доказати да је $\cup a \subseteq \cup b$, за све скупове a и b .

Доказати да за свако x , $x \subseteq \mathcal{P}(\cup x)$.

- (у) Егзистенција и јединственост скупова; непостојање скупа свих скупова; пресек непразног скупа

12. Булове операције и Декартов производ

- (е) Задатак: Доказати скуповни идентитет; питања и задаци о једноставним особина Булових операција.

Које од следећих реченица су тачне за било које скупове A и B , а које не морају бити увек тачне?

- i) Ако је $A \subseteq B$, онда је $A \cap B = B$.
 ii) Ако је $A \cup \emptyset = \emptyset$, онда је $A = \emptyset$.
 iii) Ако је $A \subseteq B$, онда је $B \setminus A = \emptyset$.
 iv) Ако је $A \cap B = \emptyset$, онда је $A = \emptyset$ или $B = \emptyset$.

- v) Ако је $A \cap B = A$, онда је $A \subseteq B$.
- vi) Ако је $A \cup B = \emptyset$, онда је $A = \emptyset$ или $B = \emptyset$.
- vii) Ако је $A \cup B = A \cap B$, онда је $A = B$.
- viii) Ако је $A \setminus \emptyset = \emptyset$, онда је $A = \emptyset$.
- ix) Ако је $A \cup B = A$, онда је $B \subseteq A$.
- x) Ако је $A \setminus B \subseteq B$, онда је $A \subseteq B$.
- xi) Ако је $A \cap B = \emptyset$, онда је $A \setminus B = A$.
- xii) Ако је $A \cup B = \emptyset$, онда је $A \setminus B = \emptyset$.
- xiii) Ако је $A \cap \emptyset = \emptyset$, онда је $A = \emptyset$.
- xiv) Ако је $A \subseteq B$, онда је $A \setminus B = \emptyset$.
- xv) Ако је $A \cap B = A$, онда је $A = B$.

Доказати да за произвољне скупове A, B, C важи:

- (a) $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$
- (б) $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$
- (в) Ако је $C \subseteq A$ и $C \subseteq B$, онда је $C \subseteq A \cap B$
- (г) Ако је $A \subseteq C$ и $B \subseteq C$, онда је $A \cup B \subseteq C$
- (д) Ако је $B \subseteq C$, онда је $A \setminus C \subseteq A \setminus B$

Доказати да за све скупове X и Y важи:

- (a) $\mathcal{P}(X \cap Y) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$; (б) $\mathcal{P}(X \cup Y) \subseteq \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$.

Навести пример скупова X и Y , ако је то могуће, таквих да је $\mathcal{P}(X \cup Y) \neq \mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y)$.

Доказати да су следећи услови међусобно еквивалентни:

- (1) $A \subseteq B$ (2) $A \cup B = B$ (3) $A \cap B = A$ (4) $A \setminus B = \emptyset$

Ако је $A \cup B = A \cap B$, доказати да је $A = B$.

Доказати да за све скупове A, B, C важе једнакости:

- (a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- (б) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- (в) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

Доказати да за произвољне скупове A, B, C, D важи:

- (a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
- (б) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$

Које услове треба да задовољавају скупови A, B, C, D да би важило $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$?

- (u) Унија, пресек, разлика и везе са инклузијом; Де Морганови закони; уређен пар, тројка, четворка, ...; Декартов производ (егзистенција и јединственост)

13. Релације и функције; композиције

- (e) Дефиниције и основни примери; композиција релација; композиција две функције (доказ)
- (u) особине композиције (композиције са дијагоналом, асоцијативност композиције)

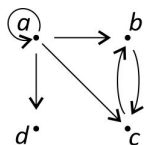
14. Инверзне релације; 1-1 и на функције; бијекције

- (e) Дефиниције и основни примери

15. Особине бинарних релација;

- (е) Дефиниције: рефлексивне, ирефлексивне, симетричне, антисиметричне, транзитивне, линеарне релације; Задатак: испитати да ли задата релација има наведене особине

Испитати да ли је приказана релација: рефлексивна, ирефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна, линеарна.



16. Релације еквиваленције

- (е) Дефиниција релације еквиваленције; класе еквиваленције; количнички скуп; особине класе еквиваленције (доказ)

17. Релације уређења

- (е) Строга, парцијална, линеарна уређења; веза између строгих и парцијалних уређења (доказ)

18. Директне и индиректне слике

- (е) Задатак: Одредити директне и индиректне слике дате функције

Одредити директне и индиректне слике функције $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$ дате са $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & c & a \end{pmatrix}$.

- (u) Директне и индиректне слике; особине

19. Схема замене; аксиома регуларности; аксиома бесконачности; скуп природних бројева

- (u) Схема замене; аксиома регуларности; Аксиома бесконачности; индуктиван скуп; најмањи индуктиван скуп; доказ и примена принципа математичке индукције

20. Уређење и аритметичке операције скупа $\mathbb{N}$

- (u) Уређење природних бројева; принцип потпуне индукције и последице (добро уређење); принцип рекурзије (без доказа); индуктивне дефиниције сабирања, множења и степеновања

21. Коначни скупови; Дирихлеов принцип

- (е) Дирихлеов принцип (формулација); појам коначног скупа и особине

- (u) Доказ Дирихлеовог принципа

22. бесконачни скупови; теорема $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

- (u) Упоредивање скупова по кардиналности; основна својства; доказ да је $|A| < |\mathcal{P}(A)|$; пребројиви и небројиви скупови