

УВОД У МАТЕМАТИЧКУ ЛОГИКУ 2024/25

испитна питања 12–22

Небојша Икодиновић

12. Булове операције и Декартов производ

(е) Питања и задаци о једноставним особинама Булових операција и Декартовог производа.

Нпр. Доказати да за све скупове X и Y важи $\mathcal{P}(X \cap Y) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y)$.

(у) Унија, пресек, разлика скупова и везе са инклузијом; Де Морганови закони; уређен пар, тројка, четворка, ...; Декартов производ (егзистенција и јединственост)

Лема 1. 1. $\forall A \forall B \exists! Y \forall x (x \in Y \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B)$

2. $\forall A \forall B \exists! Y \forall x (x \in Y \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B)$

3. $\forall A \forall B \exists! Y \forall x (x \in Y \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$

ДОКАЗ. Тврђења 1) и 2) су директне последице схеме издвајања и аксиоме екстензионалности узимајући да је $\varphi_1(x, A, B)$ формула $x \in B$, одн. да је $\varphi_2(x, A, B)$ формула $x \notin B$:

$\forall A \forall B \exists! Y \forall x (x \in Y \Leftrightarrow \underbrace{x \in A \wedge x \in B}_{x \in A \wedge \varphi_1(x, A, B)})$, одн. $\forall A \forall B \exists! Y \forall x (x \in Y \Leftrightarrow \underbrace{x \in A \wedge x \notin B}_{x \in A \wedge \varphi_2(x, A, B)})$

3) Нека је $Y = \bigcup \{A, B\}$. За било које x имамо¹:

$$\begin{aligned} x \in Y &\Leftrightarrow x \in \bigcup \{A, B\} \\ &\Leftrightarrow \exists t (t \in \{A, B\} \wedge x \in t) \\ &\Leftrightarrow \exists t ((t = A \vee t = B) \wedge x \in t) \\ &\Leftrightarrow \exists t ((t = A \wedge x \in t) \vee (t = B \wedge x \in t)) \\ &\Leftrightarrow \exists t (t = A \wedge x \in t) \vee \exists t (t = B \wedge x \in t) \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B. \end{aligned}$$

¹ У еквиваленцијском ланцу користимо формулу:

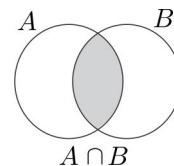
$$\exists t (t = A \wedge x \in t) \Leftrightarrow x \in A,$$

коју није тешко доказати, користећи правило:

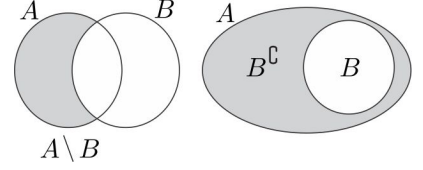
$$\frac{\varphi[x/u] \quad u = v}{\varphi[x/v]}$$

Дакле, за дате скупове A и B , постојање и јединственост скупа Y следи из аксиома екстензионалности, пара и уније. $\square$

Дефиниција 1. 1) **Пресек** скупова A и B јесте скуп $A \cap B$ који садржи само оне елементе који припадају и скупу A и скупу B , и других елемената осим ових нема. Пресек скупова A и B означавамо $A \cap B$: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$. Скупови A и B су **дисјунктни** ако је $A \cap B = \emptyset$.

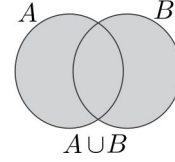


2) **Разлика** скупова A и B јесте skup који садржи само оне елементе који припадају скупу A , а не припадају скупу B , и других елемената осим ових нема. Специјално, ако је $B \subseteq A$, разлику $A \setminus B$ називамо **комплементом** скупа B у односу на A . Када је у неком контексту јасно у односу на који skup A се одређују комплементи, онда уместо $A \setminus B$ пишемо B^c .



3) **Унија** скупова A и B јесте skup $A \cup B$ који садржи само оне елементе који припадају скупу A или скупу B (бар једном од скупова A, B), и других елемената осим ових нема:

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\} = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$



Теорема 1. За произвољне скупове A, B, C важи:

- | | |
|--|---|
| 1. $A \cap A = A$ | 2. $A \cup A = A$ |
| 3. $A \cap B = B \cap A$ | 4. $A \cup B = B \cup A$ |
| 5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ | 6. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ |
| 7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | 8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| 9. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ | 10. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ |

Доказ. Све наведене једнакости једноставно доказујемо формирањем еквиваленцијских ланаца у којима користимо одговарајуће теореме предикатског рачуна. Наводимо само неколико доказа, а остале остављамо за вежбу.

Једнакост (1) $A \cap A = A$ потврђује следећи ланац (у коме користимо $\vdash \alpha \wedge \alpha \Leftrightarrow \alpha$):

$$x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in A.$$

Једнакост (8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ потврђује ланац:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\quad [\vdash \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)] \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Једнакост (10) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ потврђује ланац:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (\neg x \in B \wedge \neg x \in C) \\ &\quad [\vdash \neg(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \neg\alpha \wedge \neg\beta] \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge \neg x \in B) \wedge (x \in A \wedge \neg x \in C) \\ &\quad [\vdash \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \Leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \wedge \gamma)] \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C). \end{aligned}$$

Корисно је приметити да сваком од наведених скуповних идентитета одговара једна сродна таутологија. $\square$

Последица 1. Ако је $B \subseteq A$ и $C \subseteq A$, онда је:

- (1) $(B \cap C)^{\complement} = B^{\complement} \cup C^{\complement}$ и $(B \cup C)^{\complement} = B^{\complement} \cap C^{\complement}$,
 (2) из $B \subseteq C$ следи $C^{\complement} \subseteq B^{\complement}$.

Уређен пар скупова a и b , у ознаци (a, b) представља целину коју чине a и b , наведени одређеним редоследом – зна се који објекат је први (леви) члан целине, а који је други (десни) члан целине. Кључна особина уређених парова јесте да из $(a, b) = (c, d)$ следи $a = c$ и $b = d$.

Дефиниција 2. Уређен пар скупова a и b , у ознаци (a, b) јесте скуп $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, при чему је a прва координата и b друга координата.

$$(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Теорема 2. Нека су a, b, c и d било који скупови. Тада:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

$$\{a, b\} = \{c, d\} \Leftrightarrow (a = c \wedge b = d) \vee \vee (a = b \wedge b = c).$$

ДОКАЗ. Посебно доказујемо сваку импликацију.

($\Leftarrow$) Ако је $a = c$ и $b = d$, онда је $\{a\} = \{c\}$ и $\{a, b\} = \{c, d\}$, па је и $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$, тј. $(a, b) = (c, d)$.

($\Rightarrow$) Нека је $(a, b) = (c, d)$, тј. $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$.

Знамо да су два скупа једнака ако имају исте елементе, па из претпостављене једнакости закључујемо да важе једнакости наведене у сваком од следећа два случаја. Доказаћемо да у оба случаја мора бити $a = c$ и $b = d$.

1. случај: $\{a\} = \{c\}$, $\{a, b\} = \{c, d\}$. Из $\{a\} = \{c\}$ следи да је $a = c$, а одатле и из $\{a, b\} = \{c, d\}$, да је и $b = d$.

2. случај: $\{a\} = \{c, d\}$, $\{a, b\} = \{c\}$. Из $\{a\} = \{c, d\}$ следи да је $a = c = d$, а из $\{a, b\} = \{c\}$ да је $a = b = c$. Самим тим, свакако важи $a = c$ и $b = d$. $\square$

Лема 2. За свака два скупа A и B постоји јединствени скуп који садржи уређене парове чије прве координате припадају скупу A , а друге координате припадају скупу B (и других елемената нема):

$$\forall A \forall B \exists! Y \forall x (x \in Y \Leftrightarrow \exists a \exists b (a \in A \wedge b \in B \wedge x = (a, b)))$$

ДОКАЗ. Скуп $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ садржи све уређене парове чије прве координате припадају скупу A , а друге координате припадају скупу B . Заиста,

ако $a \in A$ и $b \in B$, тада

$$a, b \in A \cup B,$$

одакле следи

$$\{a\}, \{a, b\} \subseteq A \cup B,$$

тј.

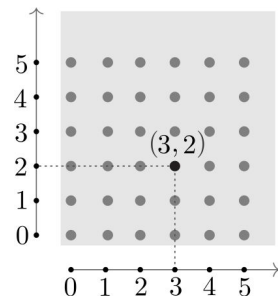
$$\{a\}, \{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B).$$

па даље имамо

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B),$$

односно

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)).$$



Наравно, скуп $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ садржи и свакакве друге елементе (који нису уређени парови, као и уређене парове чије координате не испуњавају постављени услов), па је потребно применити аксиому издвајања да бисмо формирали тражени (јединствен) скуп:

$$Y = \{x \mid x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \wedge \exists a \exists b (a \in A \wedge b \in B \wedge x = (a, b))\}.$$

Посебно истичемо да су у доказу овог тврђења употребљене аксиоме екстензионалности, пара, уније, партитивног скупа и схема издвајања. $\square$

Дефиниција 3. *Декартов производ скупова A и B јесте скуп уређених парова чије прве координате припадају скупу A , а друге скупу B . Декартов производ скупова A и B означавамо $A \times B$ и пишемо:*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

ПРИМЕР 1. Декартов производ скупова $A = \{0, 1, 2\}$ и $B = \{0, 1\}$ јесте скуп $A \times B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1)\}$. Приметимо да је $B \times A = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$, као и да је $A \times B \neq B \times A$.

Можемо формирати и следеће Декартове производе:
 $A \times A = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$,
 $B \times B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

Будући да празан скуп нема елементе, не можемо формирати уређене парове чија једна координата долази из празног скупа. Одавде следи да за сваки скуп A важе једнакости

$$A \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times A.$$

За произвољне a, b, c , **уређену тројку** (a, b, c) дефинишемо на следећи начин: $(a, b, c) \stackrel{\text{def}}{=} ((a, b), c)$, при чему a, b, c редом називамо првом, другом, трећом координатом уређене тројке (a, b, c) . Следећи еквиваленцијски ланац доказује основну особину уређених тројки:

$$\begin{aligned} (a, b, c) = (a_1, b_1, c_1) &\Leftrightarrow (a, b) = (a_1, b_1) \wedge c = c_1 \\ &\Leftrightarrow a = a_1 \wedge b = b_1 \wedge c = c_1. \end{aligned}$$

Скуп свих уређених тројки чија прва координата припада скупу A , друга скупу B , и трећа скупу C јесте скуп $(A \times B) \times C$, који се краће означава $A \times B \times C$. Слично као за Декартове производе два скупа, пишемо $A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$.

Потпуно аналогно уводимо уређене четворке, петорке итд:

$$(a, b, c, d) \stackrel{\text{def}}{=} ((a, b, c), d), (a, b, c, d, e) \stackrel{\text{def}}{=} ((a, b, c, d), e), \dots,$$

Рене Декарт (1596–1650), славни француски математичар и филозоф

Бројеве $0, 1, 2$ можемо схватити као ознаке међусобно различитих скупова; нпр. $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

$(A \times B) \times C$ и $A \times (B \times C)$ нису једнаки скупови, па зато у запису $A \times B \times C$ не изостављамо заграде због асоцијативности, већ по договору. Према општем договору о изостављању заграда, приликом означавања Декартовог производа подразумева се да је $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$ краћи запис за

$$(\dots((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \dots) \times A_n,$$

а не да се заграде могу постављати произвољно.

и Декартове производе више од три скупа:

$$A \times B \times C \times D = \{(a, b, c, d) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C \wedge d \in D\}, \dots$$

Ако је A било који скуп, Декартове производе

$$A \times A, A \times A \times A, A \times A \times A \times A, \text{ итд.}$$

називамо **Декартовим степенима** и краће их означавамо A^2, A^3, A^4 итд.

13. Релације и функције; композиције

- (е) Дефиниције и основни примери; композиција релација; композиција две функције (доказ)
- (u) особине композиције (композиције са дијагоналом, асоцијативност композиције)

Релације између два скупа: празна релација, пуна релација, дијагонала скупа

Да бисмо поједноставили записивање формула, усвајамо следеће договоре: за било коју формулу α ,

- $(\forall x \in X) \alpha$ означава $\forall x(x \in X \Rightarrow \alpha)$;
- $(\exists x \in X) \alpha$ означава $\exists x(x \in X \wedge \alpha)$;
- $(\exists! x \in X) \alpha$ означава $\exists! x(x \in X \wedge \alpha)$.

Приметимо да се за било коју формулу α једноставно доказује $(\forall x \in \emptyset) \alpha$.

Није тешко доказати следећу еквиваленцију

$$(\exists! x \in X) \alpha \Leftrightarrow (\exists x \in X) \alpha \wedge (\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)(\alpha[x/x_1] \wedge \alpha[x/x_2] \Rightarrow x_1 = x_2).$$

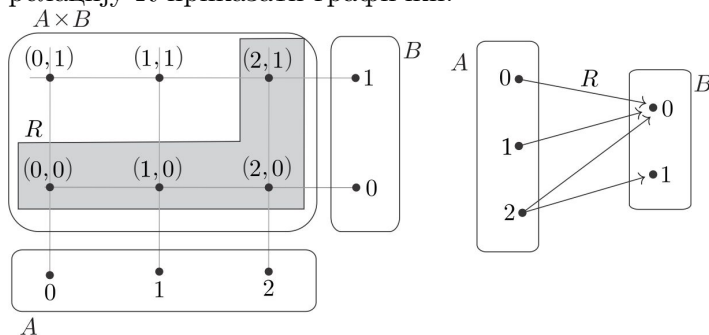
Следеће скраћенице примењујемо у обичном тексту:

- „за сваки $x \in X$ ” значи „за сваки x који припада X ”;
- „постоји $x \in X$ ” значи „постоји x који припада X ”;
- „скуп $X \subseteq A$ ” значи „скуп X који је подскуп скупа A ”.

Дефиниција 4. Сваки подскуп од $X \times Y$ назива се **бинарна релација** између X и Y . Специјално, подскуп од $X \times X$ назива се **бинарна релација** скупа X .

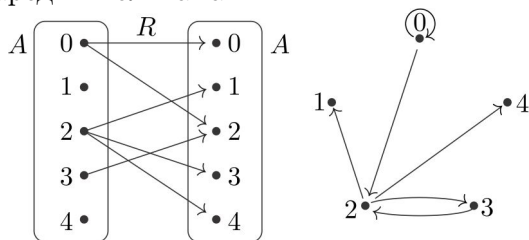
Дакле, $\mathcal{P}(X \times Y)$ је скуп свих релација између X и Y . Посебно, $\emptyset$ је тзв. *празна релација* између било која два скупа X и Y ($\emptyset \subseteq X \times Y$); $X \times Y$ је тзв. *пуна релација* између X и Y ($X \times Y \subseteq X \times Y$).

ПРИМЕР 2. Ако је $A = \{0, 1, 2\}$ и $B = \{0, 1\}$, онда је скуп $R = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 1)\}$ једна бинарна релација између A и B . У једноставним случајевима, као што је овај, погодније је релацију R приказати графички:

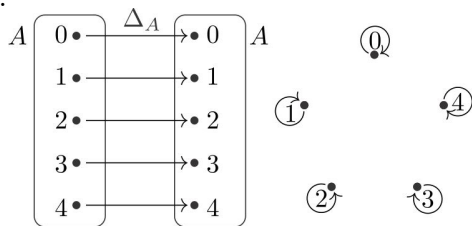


Наводимо још неколико релација између A и B : $P = \{(1, 2)\}$, $Q = \{(0, 0), (0, 1)\}$, $S = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$ итд.

ПРИМЕР 3. Нека је R нека релација скупа A , $R \subseteq A \times A$. Да бисмо графички приказали R не морамо два пута цртати скуп A . На пример, релацију $R = \{(0, 0), (0, 2), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2)\}$ скупа $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ графички можемо приказати као на наредним сликама.



Релација $\Delta_A = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \subseteq A \times A$ је важан пример релације скупа A – назива се *дијагонала* скупа A .



Дефиниција 5. *Дијагонала* скупа X је скуп

$$\Delta_X = \{(x, y) \mid (x, y) \in X \times X \wedge x = y\} = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

Дефиниција 6. Релација F између скупова X и Y , $F \subseteq X \times Y$ је **функција** из X у Y , у ознаци $F : X \rightarrow Y$, ако за свако x из X постоји јединствено y из Y тако да $(x, y) \in F$, тј. важе следећи услови:

(F1) за свако $x \in X$ постоји $y \in Y$ тако да $(x, y) \in F$,

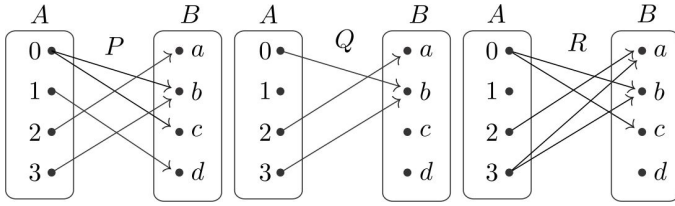
(F2) за свако $x \in X$ и све $y_1, y_2 \in Y$, из $(x, y_1) \in F$ и $(x, y_2) \in F$ следи $y_1 = y_2$.

Према претходној дефиницији, запис $F : X \rightarrow Y$ је скраћење за формулу $(\forall x \in X)(\exists! y \in Y)(x, y) \in F$, односно за конјункцију следеће две формуле:

(F1) $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)(x, y) \in F$,

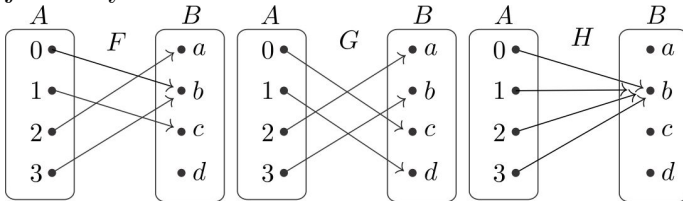
(F2) $(\forall x \in X)(\forall y_1 \in Y)(\forall y_2 \in Y)((x, y_1) \in F \wedge (x, y_2) \in F \Rightarrow y_1 = y_2)$.

ПРИМЕР 4. На наредним сликама представљено је неколико релација између скупова $A = \{0, 1, 2, 3\}$ и $B = \{a, b, c, d\}$.



Релације P , Q и R нису функције из A у B . Релација P не испуњава услов **(F2)**, према коме елемент домена не може бити почетак више од једне стрелице: $(0, b) \in P$, $(0, c) \in P$ и $b \neq c$. Релација Q не испуњава услов **(F1)**, према коме сваки елемент домена мора бити почетак неке стрелице: елемент 1 није прва координата ниједног уређеног пара из Q . Релација R не задовољава ни услов **(F1)** ни **(F2)**.

Релације F , G и H , приказане на сликама испод јесу функције из A у B .



Ове функције краће описујемо следећим табелама:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ b & c & a & b \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ c & d & a & b \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ b & b & b & b \end{pmatrix}.$$

Ако $F : X \rightarrow Y$, уместо $(x, y) \in F$ пишемо $F(x) = y$ или $x \xrightarrow{F} y$. Елементи скупа X називају се *оригинали* или *аргументи* функције F . За сваки x из X , елемент y из Y такав да је $F(x) = y$ називамо F -сликом аргумента x , при чему префикс F изостављамо када је из контекста јасно о којој функцији F је реч. За x из X , запис $F(x)$ користимо и самостално као ознаку одговарајућег елемента из Y – ознаку F -слике елемента x .

Размотримо када *празна релација* и *пуна релација* представљају функције.

(1) Да ли је $\emptyset$, посматран као празна релација између скупова X и Y , функција из X у Y ? Одговор је:

- Не, уколико је $X \neq \emptyset$, јер није задовољен услов **(F1)**;
- Да, уколико је $X = \emptyset$. Није тешко показати да услови **(F1)** и **(F2)** важе када се уместо X и F стави $\emptyset$:

$$\textbf{(F1)} \quad (\forall x \in \emptyset)(\exists y \in Y)(x, y) \in \emptyset,$$

$$\textbf{(F2)} \quad (\forall x \in \emptyset)(\forall y_1 \in Y)(\forall y_2 \in Y)((x, y_1) \in \emptyset \wedge (x, y_2) \in \emptyset \Rightarrow y_1 = y_2).$$

(2) Да ли је пуна релација $X \times Y$, између скупова X и Y , функција из X у Y ? Одговор је потврдан само у случају да је

Y једночлан скуп или је $X = \emptyset$.¹²

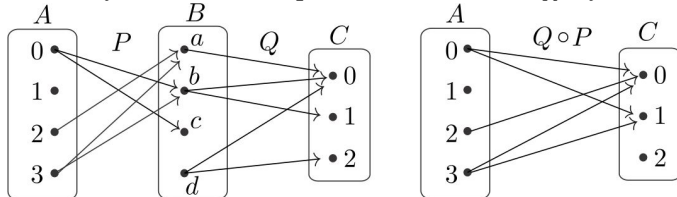
Најзад издвајамо и једну важну функцију било ког скупа. Дијагонала Δ_X је функција из X у X , $\Delta_X : X \rightarrow X$ и назива се *идентичка функција*. У литератури се користи доста различитих ознака за ову функцију: id_X , I_X , Id_X , 1_X итд, при чему се индекс X изоставља када је јасно на који скуп X се односи. Ми ћемо користити ознаку $\text{id}_X : X \rightarrow X$. Приметимо да је $\text{id}_X(x) = x$, за свако $x \in X$.

Дефиниција 7. Нека је $R \subseteq X \times Y$ и $Q \subseteq Y \times Z$. Релација између X и Z , $Q \circ R \subseteq X \times Z$ дата са

$$Q \circ R = \{(x, z) \in X \times Z \mid (\exists y \in Y) ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in Q)\}$$

назива се **композиција** релација R и Q .

ПРИМЕР 5. На слици доле лево дате су две релације $P \subseteq A \times B$ и $Q \subseteq B \times C$. Одредимо композицију $Q \circ P$.



Ослањајући се на дате графове релација уочавамо да (x, z) припада релацији $Q \circ P$ ако постоји стрелица из x у неки елемент скупа B и стрелица из тог истог елемента у z , тј. ако су x и z повезани двама надовезаним стрелицама (крај једне стрелице поклапа се са почетком друге стрелице).

Теорема 3. Нека је $R \subseteq X \times Y$, $Q \subseteq Y \times Z$ и $P \subseteq Z \times U$.

Тада је:

- (1) $R \circ \Delta_X = R = \Delta_Y \circ R$,
- (2) $P \circ (Q \circ R) = (P \circ Q) \circ R$.

ДОКАЗ. (1) Очигледно су $R \circ \Delta_X$ и $\Delta_Y \circ R$ подскупови од $X \times Y$. Доказе жељених једнакости наводимо у облику следећих еквиваленцијских ланаца:

$$\begin{aligned} (x, y) \in R \circ \Delta_X &\Leftrightarrow (\exists t \in X)((x, t) \in \Delta_X \wedge (t, y) \in R) \\ &\Leftrightarrow (\exists t \in X)(x = t \wedge (t, y) \in R) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y) \in \Delta_Y \circ R &\Leftrightarrow (\exists t \in Y)((x, t) \in R \wedge (t, y) \in \Delta_Y) \\ &\Leftrightarrow (\exists t \in Y)((x, t) \in R \wedge t = y) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in R \end{aligned}$$

¹² Приметимо да за сваки скуп X , постоји само једна функција из X у неки једночлан скуп.

Подсећамо на правило:

$$\frac{\varphi[x/u] \quad u = v}{\varphi[x/v]}$$

(2)¹⁴ Нека је $R \subseteq X \times Y$, $Q \subseteq Y \times Z$ и $P \subseteq Z \times U$. Тада је $Q \circ R \subseteq X \times Z$, па је $P \circ (Q \circ R) \subseteq X \times U$. Такође, $P \circ Q \subseteq Y \times U$, па је $(P \circ Q) \circ R \subseteq X \times U$. Остаје још да за сваки уређени пар (x, u) из $X \times U$ докажемо еквиваленцију:

$$(x, u) \in P \circ (Q \circ R) \Leftrightarrow (x, u) \in (P \circ Q) \circ R:$$

$$\begin{aligned} (x, u) \in P \circ (Q \circ R) &\Leftrightarrow (\exists z \in Z)((x, z) \in Q \circ R \wedge (z, u) \in P) \\ &\Leftrightarrow (\exists z \in Z)((\exists y \in Y)((x, y) \in R \wedge (y, z) \in Q) \wedge (z, u) \in P) \\ &\Leftrightarrow (\exists z \in Z)(\exists y \in Y)((x, y) \in R \wedge (y, z) \in Q \wedge (z, u) \in P) \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in Y)(\exists z \in Z)((x, y) \in R \wedge (y, z) \in Q \wedge (z, u) \in P) \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in Y)((x, y) \in R \wedge \exists z(z \in Z \wedge (y, z) \in Q \wedge (z, u) \in P)) \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in Y)((x, y) \in R \wedge (y, u) \in P \circ Q) \\ &\Leftrightarrow (x, u) \in (P \circ Q) \circ R \end{aligned}$$

Доказана особина оправдава запис $P \circ Q \circ R$, без заграда. $\square$

Композиција две функције такође је функција.

Теорема 4. Нека је $F : X \rightarrow Y$ и $G : Y \rightarrow Z$. Тада $G \circ F : X \rightarrow Z$.

ДОКАЗ. Јасно је да мора бити $G \circ F \subseteq X \times Z$. Проверимо услове **(F1)** и **(F2)**.

(F1) Нека је $x \in X$ произвољно изабран елемент. Будући да $F : X \rightarrow Y$, постоји елемент $y \in Y$ такав да је $(x, y) \in F$. Даље, пошто $G : Y \rightarrow Z$, постоји елемент $z \in Z$ такав да је $(y, z) \in G$. Одавде, следи да $(x, z) \in G \circ F$.

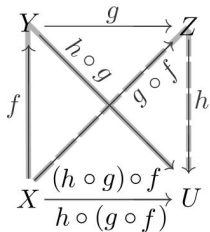
(F2) Нека су $x \in X$, $z_1, z_2 \in Z$ произвољно изабрани елементи, такви да је $(x, z_1) \in G \circ F$ и $(x, z_2) \in G \circ F$.

Из $(x, z_1) \in G \circ F$ следи да постоји $y_1 \in Y$ такав да $(x, y_1) \in F$ и $(y_1, z_1) \in G$.

Из $(x, z_2) \in G \circ F$ следи да постоји $y_2 \in Y$ такав да $(x, y_2) \in F$ и $(y_2, z_2) \in G$.

Пошто $F : X \rightarrow Y$, из $(x, y_1) \in F$ и $(x, y_2) \in F$, закључујемо да $y_1 = y_2$. Најзад, пошто $G : Y \rightarrow Z$, из $y_1 = y_2$, $(y_1, z_1) \in G$ и $(y_2, z_2) \in G$, закључујемо да $z_1 = z_2$. $\square$

Ако $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow Z$, тада за x из X , елемент $(g \circ f)(x)$, тј. $g \circ f$ -слику елемента x означавамо $g(f(x))$.



Према теорему 3 (2), ако $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ и $h : Z \rightarrow U$, једнакост

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

допушта да композицију ове три функције означавамо $h \circ g \circ f : X \rightarrow U$.

¹⁴ У доказу користимо:

(1) $\vdash \exists v(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \alpha \wedge \exists v\beta$, када се променљива v не појављује слободно у формули α ,

(2) $\vdash \exists v_1 \exists v_2 \varphi \Leftrightarrow \exists v_2 \exists v_1 \varphi$, као и

(3) асоцијативност и комутативност конјункције.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \circ f \searrow & & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

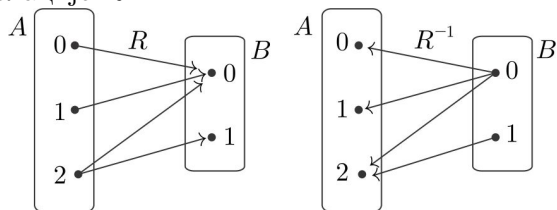
14. Инверзне релације; 1-1 и на функције; бијекције

(е) Дефиниције и основни примери

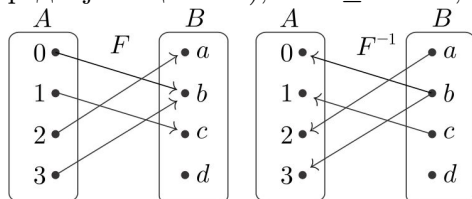
Дефиниција 8. Нека је $R \subseteq X \times Y$. Релација $R^{-1} \subseteq Y \times X$ дата са $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ назива се **инверзна релација** релације R .

ПРИМЕР 6. Нека је $A = \{0, 1, 2\}$ и $B = \{0, 1\}$.

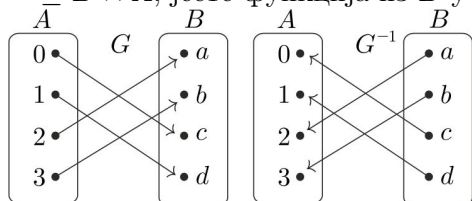
Ако је $R \subseteq A \times B$ и $R = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 1)\}$, онда је $R^{-1} \subseteq B \times A$ и $R^{-1} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\}$. Графички приказ релације R^{-1} добијамо променом смера свих стрелица релације R .



ПРИМЕР 7. Инверзна релација функције не мора бити функција. Инверзна релација функције $F : A \rightarrow B$ (приказане на наредној слици лево), $F^{-1} \subseteq B \times A$, није функција из B у A .



Инверзна релација функције $G : A \rightarrow B$ (слика доле лево), $G^{-1} \subseteq B \times A$, јесте функција из B у A .



Ако $F : X \rightarrow Y$, релација $F^{-1} \subseteq Y \times X$ је функција из Y у X ако важи:

$$(\forall y \in Y)(\exists! x \in X)(y, x) \in F^{-1}, \text{ тј. } (\forall y \in Y)(\exists! x \in X)(x, y) \in F.$$

Последња формула заправо обједињује следећа два услова:

(F1) $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(y, x) \in F^{-1}$,

(F2) $(\forall y \in Y)(\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)((y, x_1) \in F^{-1} \wedge (y, x_2) \in F^{-1} \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Ако ова два услова преформулишемо на погодан начин, добијамо услове које мора да задовољава функција F да би њој инверзна релација такође била функција:

(S) $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(x, y) \in F$, тј. за свако y из Y постоји x из X такав да $(x, y) \in F$ (сваки y из Y јесте слика неког елемента из X);

(I) $(\forall y \in Y)(\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)((x_1, y) \in F \wedge (x_2, y) \in F \Rightarrow x_1 = x_2)$, тј. ако x_1 и x_2 из X имају исте слике, онда су они једнаки.

Услов (I) можемо формулисати и у следећем облику:

(I) $(\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)(F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$,

односно, ослањајући се на закон контрапозиције,

(I) $(\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2))$.

Углавном ћемо користити једну од ове две последње формулације.

Дефиниција 9. Нека $F : X \rightarrow Y$.

• F је **на-функција** или **сирјекција**, у ознаци $F : X \xrightarrow{\text{на}} Y$, ако задовољава услов (S).¹⁶

• F је **1-1 функција** или **инјекција**, у ознаци $F : X \xrightarrow{1-1} Y$, ако задовољава услов (I).

• F је **бијекција** или **обострано-једнозначна кореспонденција**, у ознаци $F : X \xrightarrow{1-1} Y$, ако $F : X \xrightarrow{1-1} Y$ и $F : X \xrightarrow{\text{на}} Y$.

На основу претходних разматрања изводимо следећи закључак.

Теорема 5. Нека $F : X \rightarrow Y$.

(1) Инверзна релација функције F је функција ако је F бијекција.

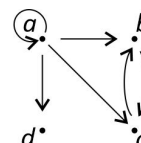
(2) Ако је F бијекција, онда је и F^{-1} бијекција.

¹⁶ Ако $F : X \xrightarrow{\text{на}} Y$, кажемо да је F функција из скупа X на скуп Y .

Ако $F : X \rightarrow Y$, за y из Y смемо користити запис $F^{-1}(y)$ само ако знамо да је F бијекција, јер само тада то има смисла.

15. Особине бинарних релација;

(е) Дефиниције: рефлексивне, ирефлексивне, симетричне, антисиметричне, транзитивне, линеарне релације. Задатак: испитати да ли задата релација има наведене особине. **Нпр.** Испитати да ли је приказана релација: рефлексивна, ирефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна, линеарна.



Дефиниција 10. Нека је $R \subseteq X \times X$. Релација R је:

(R) **рефлексивна** ако је $\Delta_X \subseteq R$, тј. за свако $x \in X$, $(x, x) \in R$;

(IR) **ирефлексивна** ако је $\Delta_X \cap R = \emptyset$, тј. за свако $x \in X$ важи $(x, x) \notin R$;

(S) **симетрична** ако је $R \subseteq R^{-1}$, тј. за све $x, y \in X$, из $(x, y) \in R$ следи $(y, x) \in R$;

(AS) **антисиметрична** ако је $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_X$, тј. за све $x, y \in X$, из $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$ следи $x = y$;

(T) **транзитивна** ако је $R \circ R \subseteq R$, тј. за све $x, y, z \in X$, из $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ следи $(x, z) \in R$;

(L) **линеарна** ако је $R \cup R^{-1} = X \times X$, тј. за све $x, y \in X$, $(x, y) \in R$ или $(y, x) \in R$.

На графичким приказима бинарних релација неког скупа:

(R) рефлексивност значи да уз сваки елемент треба нацртати петљу;

(IR) ирефлексивност значи да петља не треба да буде нацртана ни уз један елемент;

(S) симетричност значи да између свака два елемента или не постоји ниједна стрелица или постоје две супротно оријентисане стрелице;

(AS) антисиметричност значи да између два различита елемента може постојати највише једна стрелица; присуство или одсуство петљи није повезано са особином антисиметричности;

(T) транзитивност значи да за сваке две надовезане стрелице (крај једне стрелице исти је као почетак друге стрелице), постоји стрелица која директно повезује почетак прве и крај друге;

(L) линеарност значи да између свака два елемента постоји бар једна стрелица и све петље.

16. Релације еквиваленције

(е) Дефиниција релације еквиваленције; класе еквиваленције; количнички скуп; особине класа еквиваленције и докази тих особина

Једнакост је основна релација сваког непразног скупа. У универзуму скупова, бинарни предикат $=$ одређује на сваком непразном скупу X релацију једнакости, коју смо означавали Δ_X ; природнија је ознака $=_X$, при чему је уобичајено да се изоставља индекс, јер је увек јасно који скуп се посматра.

Дефиниција 11. Бинарна релација E скупа X , $E \subseteq X \times X$, јесте **релација еквиваленције** ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Инфиксна нотација је много чешћа за бинарне релације; поред тога, релације еквиваленције се углавном означавају знацима који подсећају на знак једнакости, попут: $\approx$, $\sim$, $\cong$, $\simeq$, $\equiv$, $\doteq$, итд.

$$\frac{}{x \sim x} \quad \frac{x \sim y}{y \sim x} \quad \frac{x \sim y \quad y \sim z}{x \sim z}$$

Дефиниција 12. Нека је $E \subseteq X \times X$ релација еквиваленције. За сваки елемент $x \in X$ скуп

$$[x]_E = \{y \in X \mid (x, y) \in E\}$$

назива се **класа еквиваленције** елемента x у односу на релацију E . Скуп свих класа еквиваленције назива се **количнички скуп** и обележава се X/E . Дакле,

$$X/E = \{[x]_E \mid x \in X\}.$$

Класе еквиваленције се у литератури и другачије означавају. На пример, уместо $[x]_E$ пише се и x/E , или C_x у случајевима када је јасно о којој релацији еквиваленције је реч.

ПРИМЕР 8. Релација E скупа $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ задата је графом десно.

Није тешко уочити да је E релација еквиваленције. Одредимо класе еквиваленције релације:

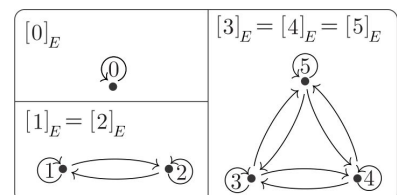
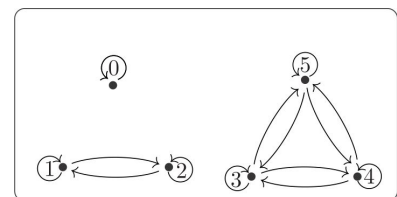
$$[0]_E = \{0\}, [1]_E = [2]_E = \{1, 2\}, [3]_E = [4]_E = [5]_E = \{3, 4, 5\}.$$

Количнички скуп је

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}/E = \{[0]_E, [1]_E, [2]_E, [3]_E, [4]_E, [5]_E\} = \{\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}\}.$$

Очигледно да је класама еквиваленције скуп $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ разбијен на непразне дисјунктне подскупове чија је унија наведени скуп.

Теорема 6. Нека је $E \subseteq X \times X$ релација еквиваленције.



1. За свако $x \in X$, $x \in [x]_E$, па је самим тим $[x]_E \neq \emptyset$.
2. За све $x, y \in X$, $(x, y) \in E$ акко $[x]_E = [y]_E$.
3. За све $x, y \in X$, $[x]_E \neq [y]_E$ акко $[x]_E \cap [y]_E = \emptyset$.
4. $X = \bigcup X/E = \bigcup_{x \in X} [x]_E$.

ДОКАЗ. 1. Тврђење следи директно из дефиниције класе еквиваленције и чињенице да је релација еквиваленције рефлексивна.

2. ($\Rightarrow$) Претпоставимо да $(x, y) \in E$. Треба доказати једнакост $[x]_E = [y]_E$.

Ако $z \in [x]_E$, онда $(x, z) \in E$. Због симетричности релације E , из $(x, y) \in E$ следи да $(y, x) \in E$. Како је E транзитивна релација из $(y, x) \in E$ и $(x, z) \in E$ следи $(y, z) \in E$, тј. $z \in [y]_E$. Дакле, $[x]_E \subseteq [y]_E$. Обрнута инклузија се доказује на исти начин.

($\Leftarrow$) Претпоставимо да је $[x]_E = [y]_E$. Због рефлексивности релације E имамо да $y \in [y]_E$, па $y \in [x]_E$ што значи да $(x, y) \in E$.

3. ($\Rightarrow$) Нека је $[x]_E \neq [y]_E$, тј. $(x, y) \notin E$ (према тврђењу под 2). Треба доказати да је $[x]_E \cap [y]_E = \emptyset$. Претпоставимо супротно, да је $[x]_E \cap [y]_E \neq \emptyset$, тј. да постоји z такав да је $z \in [x]_E \cap [y]_E$. Тада $z \in [x]_E$ и $z \in [y]_E$, тј. $(x, z) \in E$ и $(y, z) \in E$. Због симетричности релације E имамо да $(z, y) \in E$. Узимајући у обзир транзитивност релације E из $(x, z) \in E$ и $(z, y) \in E$ закључујемо да $(x, y) \in E$ што је супротно полазној претпоставци.

($\Leftarrow$) Претпоставимо да је $[x]_E \cap [y]_E = \emptyset$. Уколико би било $[x]_E = [y]_E$, имали бисмо да је $[x]_E = [y]_E = [x]_E \cap [y]_E = \emptyset$, што је немогуће према тврђењу под 1. Дакле, $[x]_E \neq [y]_E$. $\square$

17. Релације уређења

- (е) Строга, парцијална, линеарна уређења; веза између строгих и парцијалних уређења (доказ); највећи, најмањи, максимални, минимални елементи

Дефиниција 13. Релација $R \subseteq X \times X$ је:

- **релација строгог поретка**, односно **строго уређење** ако је ирефлексивна и транзитивна;
- **релација поретка**, односно **(парцијално) уређење** ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна;
- **релација линеарног поретка**, односно **линеарно (то-тално) уређење** ако је рефлексивна, антисиметрична, транзитивна и линеарна.

Теорема 7. ²³ 1) Ако је $\preccurlyeq$ уређење скупа X , онда је релација $\prec$ дата са:

$$x \prec y \text{ ако } x \preccurlyeq y \wedge x \neq y,$$

строго уређење скупа X .

2) Ако је $\prec$ строго уређење скупа X , онда је релација $\preccurlyeq$ дата са:

$$x \preccurlyeq y \text{ ако } x \prec y \vee x = y,$$

уређење скупа X .

Доказ. 1) (IR) Релација $\prec$ је ирефлексивна, јер је конјункција $x \preccurlyeq x \wedge x \neq x$ нетачна за свако x .

(T) Нека је $x \prec y$ и $y \prec z$. Тада је

$$x \preccurlyeq y, x \neq y, y \preccurlyeq z, y \neq z.$$

Како је $\preccurlyeq$ транзитивна, из $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq z$, следи да је $x \preccurlyeq z$. Остаје још да се докаже да је $x \neq z$. Претпоставимо супротно, да је $x = z$. Тада је $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq x$, па због антисиметричности релације $\preccurlyeq$ важи $x = y$, што није могуће јер је $x \neq y$.

2) (R) Релација $\preccurlyeq$ је рефлексивна, јер за свако x важи $x = x$, а самим тим и $x \prec x \vee x = x$.

(AS) Претпоставимо да је $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq x$. Треба да докажемо да је $x = y$. Претпоставимо супротно да је $x \neq y$. Тада мора бити $x \prec y$ и $y \prec x$. Међутим, из транзитивности релације $\prec$ следи да је $x \prec x$, што није могуће, јер је $\prec$ ирефлексивна релација.

(T) Претпоставимо да је $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq z$. Треба доказати да је $x \preccurlyeq z$. Разликујемо неколико случајева.

1. случај. Ако је $x = y$ и $y = z$, онда је $x = z$, па важи $x \preccurlyeq z$.
2. случај. Ако је $x \prec y$ и $y = z$, онда је и $x \prec z$, па је $x \preccurlyeq z$.

²³ Ако је нека релација поретка приказана графички, брисањем свих петљи добијамо одговарајућу релацију строгог поретка. Важи и обрнуто, додавањем свих петљи на приказ релације строгог поретка, добијамо приказ одговарајуће релације поретка.

3. случај. Ако је $x = y$ и $y \prec z$, онда је и $x \prec z$, па је $x \preceq z$.
 4. случај. Ако је $x \prec y$ и $y \prec z$, онда због транзитивности релације $\prec$ важи $x \prec z$, а самим тим и $x \preceq z$. $\square$

Релације строгог поретка углавном се означавају знацима попут $<$, $\prec$, $\triangleleft$, $\sqsubset$ и слично, а њима одговарајуће релације поретка додавањем цртице испод знака: $\leq$ (или $\leq$), $\preceq$ (или $\preceq$), $\trianglelefteq$, $\sqsubseteq$. У наставку ћемо овај договор о означавању подразумевати.

ПРИМЕР 9. За било који скуп X , инклузија одређује једну релацију поретка на скупу $\mathcal{P}(X)$:

(R) за све $A \in \mathcal{P}(X)$ важи $A \subseteq A$,

(AS) за све $A, B \in \mathcal{P}(X)$, из $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$ следи $A = B$,

(T) за све $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$, из $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ следи $A \subseteq C$.

Строга инклузија ($\subset$) је строго уређење на $\mathcal{P}(X)$.

Дефиниција 14. Нека је $\leq$ релација поретка на скупу X .

- Елемент $a \in X$ је **$\leq$ -најмањи** ако за свако $x \in X$ важи $a \leq x$.
- Елемент $a \in X$ је **$\leq$ -највећи** ако за свако $x \in X$ важи $x \leq a$.
- Елемент $a \in X$ је **$\leq$ -минималан** ако не постоји $x \in X$ такав да је $x < a$. (Наравно, $<$ означава строги поредак који одговара поретку $\leq$).
- Елемент $a \in X$ је **$\leq$ -максималан** ако не постоји $x \in X$ такав да је $a < x$.

У случајевима када је јасно за коју релацију поретка $\leq$ одређујемо елементе уведене претходном дефиницијом, у називима тих елемената изостављамо префикс „ $\leq$ -“.

18. Директне и индиректне слике

(е) Задатак: Одредити директне и индиректне слике дате функције **Нпр.** Одредити директне и индиректне слике функције $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$ дате са $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & c & a \end{pmatrix}$.

(у) Директне и индиректне слике; особине и докази особина

Било која функција $f : X \rightarrow Y$, одређује две нове функције:

- једну из $\mathcal{P}(X)$ у $\mathcal{P}(Y)$, коју називамо **ко- f** ('ко еф'), и за коју користимо исту ознаку f , али аргумент (подскуп од X) наводимо у угластим заградама:

$$f[A] \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid (\exists a \in A) f(a) = y\}, \text{ за } A \subseteq X.$$

- другу из $\mathcal{P}(Y)$ у $\mathcal{P}(X)$, коју називамо **контра- f** ('контра еф'), и за коју користимо ознаку f^{-1} (која у овом контексту нема никакве везе са појмом инверзне функције), а аргумент (подскуп од Y) наводимо у угластим заградама:

$$f^{-1}[B] \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) \in B\}, \text{ за } B \subseteq Y.$$

Скуп $f[A] = \{y \in Y \mid (\exists a \in A) f(a) = y\} \subseteq Y$ називамо **директна слика** скупа $A \subseteq X$; $f[A]$ је подскуп од Y који садржи само оне елементе који су f -слике елемената из A . Будући да су сви елементи скупа $f[A]$ облика $f(a)$, $a \in A$, пишемо и $f[A] = \{f(a) \mid a \in A\}$.

Скуп $f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subseteq X$ називамо **индиректна слика** скупа $B \subseteq Y$; $f^{-1}[B]$ је подскуп од X који садржи само оне елементе из X чије f -слике припадају скупу B .

ПРИМЕР 10. Нека $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{a, b, c\}$:

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ b & a & a \end{pmatrix}.$$

Одредимо директне слике свих подскупова домена:

$$\begin{aligned} f[\emptyset] &= \emptyset & f[\{0\}] &= \{b\} & f[\{1\}] &= \{a\} & f[\{2\}] &= \{a\} \\ f[\{0, 1\}] &= \{a, b\} & f[\{1, 2\}] &= \{a\} & f[\{0, 2\}] &= \{a, b\} & f[\{0, 1, 2\}] &= \{a, b\} \end{aligned}$$

Одредимо и индиректне слике свих подскупова кодомена:

$$\begin{aligned} f^{-1}[\emptyset] &= \emptyset & f^{-1}[\{a\}] &= \{1, 2\} & f^{-1}[\{b\}] &= \{0\} & f^{-1}[\{c\}] &= \emptyset \\ f^{-1}[\{a, b\}] &= \{0, 1, 2\} & f^{-1}[\{a, c\}] &= \{1, 2\} & f^{-1}[\{b, c\}] &= \{0\} & f^{-1}[\{a, b, c\}] &= \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

Посебно наглашавамо да се, на пример, $f^{-1}[\{a\}]$ битно разликује од записа $f^{-1}(a)$, који у овом случају нема смисла јер f није бијекција.

Теорема 8. Нека $f : X \rightarrow Y$. За произвољне $A, A_1, A_2 \subseteq X$ и $B, B_1, B_2 \subseteq Y$ важи:

- (1) $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$; (2) $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$;
- (3) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f[A_1] \subseteq f[A_2]$; (4) $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}[B_1] \subseteq f^{-1}[B_2]$;
- (5) $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$; (6) $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$;
- (7) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$; (8) $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$.

ДОКАЗ. (1) Ако $x \in A$, онда је очигледно $f(x) \in f[A]$. Како је $f(x) \in f[A]$ еквивалентно са $x \in f^{-1}[f[A]]$, непосредно изводимо жељени закључак.

(2) Ако $y \in f[f^{-1}[B]]$, онда је $y = f(x)$, за неко $x \in f^{-1}[B]$. Како је $x \in f^{-1}[B]$ еквивалентно са $f(x) \in B$, следи $y = f(x) \in B$.

(3) Нека је $A_1 \subseteq A_2$. Претпоставимо да $y \in f[A_1]$. Тада је $y = f(x)$, за неко $x \in A_1$. Будући да је $A_1 \subseteq A_2$, из $y = f(x)$ и $x \in A_1 \subseteq A_2$ закључујемо да $y \in f[A_2]$.

(4) Нека је $B_1 \subseteq B_2$. Претпоставимо да $x \in f^{-1}[B_1]$, односно $f(x) \in B_1$. Из $f(x) \in B_1 \subseteq B_2$, закључујемо да $x \in f^{-1}[B_2]$.

(5) Ова инклузија директно следи из (3). Како је $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$ и $A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$, из (3) следи $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1]$ и $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_2]$, а одавде и $f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2]$.

(6) Инклузију $f^{-1}[B_1 \cap B_2] \subseteq f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$ директно добијамо из (4). Докажимо да је и $f^{-1}[B_1 \cap B_2] \supseteq f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$. Ако $x \in f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$, онда $x \in f^{-1}[B_1]$ и $x \in f^{-1}[B_2]$, односно $f(x) \in B_1$ и $f(x) \in B_2$. Дакле, $f(x) \in B_1 \cap B_2$, што је еквивалентно са $x \in f^{-1}[B_1 \cap B_2]$.

(7) Једнакост доказује следећи еквиваленцијски ланац:

$$\begin{aligned}
 y \in f[A_1 \cup A_2] &\Leftrightarrow \exists x(x \in A_1 \cup A_2 \wedge y = f(x)) \\
 &\Leftrightarrow \exists x((x \in A_1 \vee x \in A_2) \wedge y = f(x)) \\
 &\Leftrightarrow \exists x((x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee (x \in A_2 \wedge y = f(x))) \\
 &\Leftrightarrow \exists x(x \in A_1 \wedge y = f(x)) \vee \exists x(x \in A_2 \wedge y = f(x)) \\
 &\Leftrightarrow y \in f[A_1] \vee y \in f[A_2] \\
 &\Leftrightarrow y \in f[A_1] \cup f[A_2].
 \end{aligned}$$

(8) Једнакост доказује следећи еквиваленцијски ланац:

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}[B_1 \cup B_2] &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \\
 &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2 \\
 &\Leftrightarrow x \in f^{-1}[B_1] \vee x \in f^{-1}[B_2] \\
 &\Leftrightarrow x \in f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]. \quad \square
 \end{aligned}$$

19. Схема замене; аксиома регуларности; аксиома бесконачности; скуп природних бројева

(u) Схема замене; аксиома регуларности; аксиома бесконачности; индуктиван скуп; најмањи индуктиван скуп; доказ и примена принципа математичке индукције

▼ Схема замене

Важан метод дефинисања функција омогућава нам нова схема – **схема замене**. Пре него што је наведемо, описаћемо ситуације у којима је користимо. Претпоставимо да смо, за неку формулу $\varphi(x, y)$, доказали $\forall x \exists! y \varphi(x, y)$. Ако је A било који скуп, тада мора да важи и $(\forall x \in A) \exists! y \varphi(x, y)$, што значи да за сваки x из A постоји јединствен y за који је $\varphi(x, y)$. Све ово указује на могућност да се формулом φ дефинише једна функција са доменом A . Међутим, да би на овај начин била дефинисана функција, неопходно је да знамо у ком скупу се налазе те јединствене „слике” елемената из A . Схема замене нас ослобађа сваке бригае по овом питању, јер тврди да за сваку формулу $\varphi(x, y)$ за коју се може утврдити $\forall x \exists! y \varphi(x, y)$ и сваки скуп A постоји скуп који садржи само оне скупове y за које $(\exists x \in A) \varphi(x, y)$.

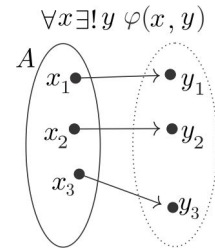


СХЕМА ЗАМЕНЕ

$$\forall x \exists! y \varphi(x, y) \Rightarrow \forall A \exists B \forall y (y \in B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge \varphi(x, y)))$$

▼ Аксиома регуларности

Аксиомом регуларности се тврди да сваки непразан скуп садржи елемент са којим нема заједничких елемената.

АКСИОМА РЕГУЛАРНОСТИ

$$\forall X (X \neq \emptyset \Rightarrow \exists x (x \in X \wedge x \cap X = \emptyset))$$

Теорема 9. (1) Не постоји скуп x такав да $x \in x$.

(2) Не постоје скупови x и y такви да $x \in y$ и $y \in x$.

Доказ. (1) Ако би постојао скуп x такав да $x \in x$, онда скуп $\{x\}$ не би садржао елемент са којим нема заједничких елемената, јер $x \in x \cap \{x\}$, што је супротно аксиоми регуларности. (2) Претпоставимо да постоје скупови x и y такви да је $x \in y$ и $y \in x$. Тада, супротно аксиоми регуларности, скуп $\{x, y\}$ не садржи елемент са којим нема заједничких елемената: $x \cap \{x, y\} \neq \emptyset$, јер $y \in x \cap \{x, y\}$, и $y \cap \{x, y\} \neq \emptyset$, јер $x \in y \cap \{x, y\}$. $\square$

Теорема 10. За било које скупове x и y , из $x \cup \{x\} = y \cup \{y\}$ следи $x = y$.

ДОКАЗ. Нека је $x \cup \{x\} = y \cup \{y\}$. Претпоставимо супротно ономе што треба доказати да је $x \neq y$. Како $x \in y \cup \{y\}$ и $x \neq y$, закључујемо да $x \in y$. Слично томе, из $y \in x \cup \{x\}$ и $x \neq y$ следи $y \in x$. Међутим, није могуће да $x \in y$ и $y \in x$, према претходној теорему (2). Дакле, $x = y$. $\square$

Скуп $x \cup \{x\}$ називамо **следбеник** скупа x и обележавамо га x' . Полазећи од празног скупа, редом уводимо *следбенике* добијених скупова које из разумљивих разлога можемо идентификовати са природним бројевима:

$$\begin{aligned} 0 &= \emptyset & 1 &= 0' = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{0\} \\ 2 &= 1' = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} \\ 3 &= 2' = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} \\ 4 &= 3' = 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\} \\ &\dots \end{aligned}$$

Интуитивно је јасно да генерисање нових скупова на описани начин неограничено можемо продужавати – за сваки добијени скуп, поступак можемо наставити увођењем његовог следбеника. Наредна аксиома заправо тврди да постоји скуп у коме ће се наћи сви скупови који се могу добити на описани начин. Будући да је описани поступак веома близак *бројању*, наредна аксиома ће бити кључна за увођење скупа природних бројева.

▼ Аксиома бесконачности. Скуп природних бројева

АКСИОМА БЕСКОНАЧНОСТИ

Постоји скуп који садржи 0 (тј. $\emptyset$) и следбеника сваког свог елемента.

$$\exists I(0 \in I \wedge \forall x(x \in I \Rightarrow x \cup \{x\} \in I))$$

Сваки скуп који садржи 0 и следбеника сваког свог елемента називамо **индуктивним скупом**. Аксиомом бесконачности се тврди да постоји бар један индуктиван скуп. Не можемо тврдити да постоји јединствен индуктиван скуп, али колико год да их има сви садрже као подскуп један исти индуктиван скуп, тзв. *најмањи индуктиван скуп*.

Ако је I неки индуктиван скуп, означимо са $\mathcal{I}(I)$ непразан скуп свих индуктивних подскупова од I :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(I) &= \{X \mid X \subseteq I \wedge \text{„}X \text{ је индуктиван“}\} \\ &= \{X \mid X \subseteq I \wedge 0 \in X \wedge \forall x(x \in X \Rightarrow x' \in X)\}. \end{aligned}$$

Нека је $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap \mathcal{I}(I)$. Доказаћемо да је ω индуктиван скуп и то најмањи у следећем смислу: ако је S индуктиван и $S \subseteq \omega$,

онда је $S = \omega$, односно не постоји строги подскуп од ω који је индуктиван.

Теорема 11. (1) ω је индуктиван скуп.

(2) Ако је $S \subseteq \omega$ и важи:

(БИ) $0 \in S$,

(ИК) ако $x \in S$, онда $x' \in S$,

онда је $S = \omega$

ДОКАЗ. (1) Будући да за сваки $X \in \mathcal{I}(I)$, $0 \in X$, следи да мора бити и $0 \in \bigcap \mathcal{I}(I) = \omega$.

Остаје још да се покаже да ω садржи следбеника сваког свог елемента. Нека је $x \in \omega$ произвољан. Из $x \in \omega = \bigcap \mathcal{I}(I)$, следи да $x \in X$, за сваки $X \in \mathcal{I}(I)$. Како је сваки $X \in \mathcal{I}(I)$ индуктиван, сваки од њих садржи и x' . Дакле, $x' \in \bigcap \mathcal{I}(I) = \omega$. (2) Нека је $S \subseteq \omega$ такав да важе услови (БИ) и (ИК) – значи S је индуктиван подскуп од ω . Како је $\omega \subseteq I$, скуп S је и индуктиван подскуп од I , тј. $S \in \mathcal{I}(I)$, па је $\bigcap \mathcal{I}(I) \subseteq S$, тј. $\omega \subseteq S$, одакле следи да је $S = \omega$. $\square$

Остаје још да покажемо да за било који (други) индуктиван скуп I_1 важи $\omega \subseteq I_1$, или еквивалентно $\omega \cap I_1 = \omega$. Очигледно је $\omega \cap I_1 \subseteq \omega$. Једноставно је уверити се да скуп $\omega \cap I_1$ задовољава услове (БИ) и (ИК), па према претходној теореме (2) мора бити $\omega \cap I_1 = \omega$. Одавде непосредно закључујемо и да је $\omega = \bigcap \mathcal{I}(I_1)$. Скуп ω називамо **скупом природних бројева** и обележавамо га и $\mathbb{N}$. Будући да је ова друга ознака много уобичајенија, углавном ћемо њу користити у наставку. Знамо да $\mathbb{N}$ садржи 0, 1, 2, 3, 4, итд. и да функција *следбеник* $': \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ има следеће особине:

- за свако $n \in \mathbb{N}$, $n' \neq 0$ (следбеник није на функција);
- за све $m, n \in \mathbb{N}$, из $m' = n'$ следи $m = n$ (следбеник јесте 1-1 функција).

Основно својство скупа природних бројева изражено је особином (2) теореме 11 – **принципом математичке индукције**. Принцип математичке индукције користимо за доказивање формула облика $(\forall n \in \mathbb{N}) \varphi(n)$. Прво формирамо одговарајући скуп $S = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n)\}$ и настојимо да докажемо:

(БИ) базу индукције, тј. $0 \in S$ и

(ИК) индуктивни корак, тј. да из $n \in S$ следи $n' \in S$. Пошто у индуктивном кораку треба доказати импликацију, претпостављамо $n \in S$, што се назива *индуктивна претпоставка* и настојимо да докажемо $n' \in S$.

Доказ применом принципа математичке индукције можемо скратити тако што не формирамо скуп S већ доказујемо формуле:

(БИ) $\varphi(n/0)$

(ИК) $(\forall n \in \mathbb{N})(\varphi \Rightarrow \varphi(n/n'))$.

Неколико начина примене овог принципа илуструјемо доказивањем следећих важних тврђења.

Теорема 12. (1) За све природне бројеве m, n , $m \in n \Rightarrow m \subseteq n$.

(2) За све природне бројеве m, n , $m \in n \Leftrightarrow m \subset n$.

(3) За све природне бројеве m, n , $m \in n \vee m = n \vee n \in m$.

ДОКАЗ. (1) Да бисмо доказали

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(m \in n \Rightarrow m \subseteq n),$$

формирамо скуп

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid (\forall m \in \mathbb{N})(m \in n \Rightarrow m \subseteq n)\}$$

и доказујемо да је $S = \mathbb{N}$, применом принципа математичке индукције.

(БИ) Докажимо да $0 \in S$, тј. $(\forall m \in \mathbb{N})(m \in 0 \Rightarrow m \subseteq 0)$. Како је $0 = \emptyset$ и знамо да за свако m важи $m \notin 0$, онда се из претпоставке $m \in 0$ изводи било шта ($\perp_E$), па и $m \subseteq 0$. Дакле, $0 \in S$.

(ИК) Претпоставимо да $n \in S$, тј.

(ИП) $(\forall m \in \mathbb{N})(m \in n \Rightarrow m \subseteq n)$.

Треба да докажемо $n' \in S$, тј. $(\forall m \in \mathbb{N})(m \in n' \Rightarrow m \subseteq n')$. Из $m \in n' = n \cup \{n\}$ следи да $m \in n$ или $m = n$. У случају да је $m \in n$, према (ИП) закључујемо $m \subseteq n$, па је $m \subseteq n \cup \{n\} = n'$. У случају $m = n$, непосредно закључујемо да $m = n \subseteq n'$.

Дакле, $S = \mathbb{N}$.

(2) И у овом случају користимо принцип математичке индукције, али ћемо поступити мало другачије у односу на доказ тврђења (1).

Нека је m произвољан природан број и

$$S_m = \{n \in \mathbb{N} \mid m \in n \Leftrightarrow m \subset n\}.$$

Доказаћемо да је $S_m = \mathbb{N}$.

(БИ) Знамо да $m \notin 0$ и $m \not\subset 0$ (празан скуп нема праве подскупове), одакле једноставно изводимо $m \in 0 \Leftrightarrow m \subset 0$. Дакле, $0 \in S_m$.

(ИК) Претпоставимо да $n \in S_m$, тј. (ИП) $m \in n \Leftrightarrow m \subset n$.

Докажимо $m \in n' \Leftrightarrow m \subset n'$.

Ако $m \in n' = n \cup \{n\}$, онда $m \in n$ или $m = n$. У случају да $m \in n$, према (ИП) следи $m \subset n$, а тиме и $m \subset n'$, јер је $n \subset n'$. У случају да је $m = n$, онда је очигледно $m \subset n'$.

Нека је $m \subset n' = n \cup \{n\}$. Докажимо најпре да $n \notin m$. Ако би било $n \in m$, имали бисмо $\{n\} \subseteq m$ и, према (1), $n \subseteq m$, одакле следи $n' = n \cup \{n\} \subseteq m \subset n'$, што је немогуће. Дакле, $n \notin m$, па из $m \subset n \cup \{n\}$, следи $m \subseteq n$, тј. $m \subset n$ или $m = n$. У случају да је $m \subset n$, према (ИП) закључујемо да $m \in n$, а самим тим и $m \in n'$. У случају да је $m = n$, директно добијамо $m = n \in n'$.

Дакле, $S_m = \mathbb{N}$ за сваки природан број m , одакле следи жељено тврђење.

(3) Нека је $S = \{m \in \mathbb{N} \mid (\forall n \in \mathbb{N})(m \in n \vee m = n \vee n \in m)\}$.
(БИ) Докажимо $(\forall n \in \mathbb{N})(0 \in n \vee 0 = n \vee n \in 0)$.

Очигледно је да за било које $n \in \mathbb{N}$ важи $n = 0$ или $n \neq 0$. У случају $n = 0$, директно изводимо $0 \in n \vee 0 = n \vee n \in 0$. Уколико је $n \neq 0$, тада је $\emptyset = 0 \subset n$, па према тврђењу (2) закључујемо $0 \in n$, а тиме и $0 \in n \vee 0 = n \vee n \in 0$. Дакле, $0 \in S$.

(ИК) Претпоставимо да $m \in S$, тј.

(ИП) $(\forall n \in \mathbb{N})(m \in n \vee m = n \vee n \in m)$.

Да бисмо доказали

$$(*) \quad (\forall n \in \mathbb{N})(m' \in n \vee m' = n \vee n \in m'),$$

изаберимо произвољан $n \in \mathbb{N}$. Тада према (ИП) важи $m \in n$ или $m = n$ или $n \in m$. Разликујемо три случаја.

1. случај: $m \in n$. Тада је, према (2), $m \subset n$, па је $m' = m \cup \{m\} \subseteq n$. Уколико је $m' \subset n$, онда, поново према (2), важи $m' \in n$, па самим тим важи (*). Формула (*) свакако важи и уколико је $m' = n$.

2. случај: $m = n$. Тврђење (*) важи јер $n \in n' = m'$.

3. случај: $n \in m$. Непосредно добијамо $n \in m'$, па важи (*).

□

20. Уређење и аритметичке операције скупа $\mathbb{N}$

(u) Уређење природних бројева; принцип потпуне индукције и последице (добро уређење); принцип рекурзије (без доказа); индуктивне дефиниције сабирања, множења и степеновања

Претходна теорема показује да припадање ($\in$), односно строга инклузија ($\subset$) на уобичајени начин уређују скуп природних бројева:

$$0 \in 1 \in 2 \in 3 \in 4 \in 5 \cdots, \quad \text{односно} \quad 0 \subset 1 \subset 2 \subset 3 \subset 4 \subset 5 \cdots$$

Заиста, знамо да:

- за сваки природан број n важи $n \notin n$ (ово је последица аксиоме регуларности – теорема 9 (1), али се може извести и без ове аксиоме, математичком индукцијом);
- за све природне бројеве k, m, n , ако $k \in m$ и $m \in n$, онда $k \in n$ (ово је директна последица претходне теореме (2)).

Дакле, бинарна релација $\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \in n\}$ јесте *строго уређење скупа природних бројева* и обележава се $<$. Релацију $\leq$, тзв. *уређење скупа $\mathbb{N}$* уводимо на следећи начин:

$$m \leq n \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} m < n \vee m = n.$$

Последица 2. За све природне бројеве m, n важи²⁵

- (1) $m \leq n \Leftrightarrow m \subseteq n$;
- (2) $m \leq n \vee n \leq m$ (поредак $\leq$ је линеаран);
- (3) $m < n \Leftrightarrow m' \leq n$;
- (4) $m < n' \Leftrightarrow m \leq n$;
- (5) $m < n \Leftrightarrow m' < n'$ (функција следбеник је монотона).

ДОКАЗ. (1) Према претходној теореме (2) имамо да је:

$$m \leq n \Leftrightarrow m < n \vee m = n \Leftrightarrow m \subset n \vee m = n \Leftrightarrow m \subseteq n.$$

(2) Директно из тврђења (3) претходне теореме.

(3) Ако је $m < n$, тј. $m \in n$, онда је $\{m\} \subseteq n$ и, према теореме 12 (1), $m \subseteq n$, па је $m' = m \cup \{m\} \subseteq n$, тј. $m' \leq n$.

Из $m' \leq n$ следи $m' < n$ или $m' = n$, и у оба случаја, будући да је $m < m'$, закључујемо $m < n$.

(4) и (5) Доказе остављамо за вежбу. $\square$

Теорема 13. [Принцип потпуне индукције] Нека је $S \subseteq \mathbb{N}$. Ако важи

$$(\forall n \in \mathbb{N})((\forall k < n) k \in S \Rightarrow n \in S),$$

онда је $S = \mathbb{N}$.

²⁵ Наравно, $\leq$ наслеђује основна својства инклузије $\subseteq$. За све $k, m, n \in \mathbb{N}$:

- $n \leq n$;
- $m \leq n \wedge n \leq m \Rightarrow m = n$;
- $k \leq m \wedge m \leq n \Rightarrow k \leq n$.

ДОКАЗ. ²⁶ Формулу $(\forall k < n) k \in S$ можемо записати и на следећи начин: $(\forall k \in \mathbb{N}) k \in S$.

Приметимо најпре да важи

$$(БИ) \quad (\forall k < 0) k \in S.$$

Ова формула је заправо скраћење за $\forall k (k \in 0 \Rightarrow k \in S)$ и једноставно се доказује, јер знамо да за свако k важи $k \notin 0$.

Није тешко уочити, а ни формално доказати, да је формула

$$(\forall k < n) k \in S \Rightarrow n \in S$$

еквивалентна формули

$$(ИК) \quad (\forall k < n) k \in S \Rightarrow (\forall k < n') k \in S.$$

Из (БИ) и (ИК), према принципу математичке индукције, следи

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k < n) k \in S.$$

Најзад, из последње формуле и претпоставке $S \subseteq \mathbb{N}$ закључујемо $S = \mathbb{N}$. $\square$

Теорема 14. *Сваки непразан подскуп скупа природних бројева има најмањи елемент.*

ДОКАЗ. Нека је X подскуп од $\mathbb{N}$ који нема најмањи елемент. Доказаћемо да X мора бити празан, тј. да је $\mathbb{N} \setminus X = \mathbb{N}$. Ову једнакост доказујемо применом принципа потпуне индукције.

Нека је n природан број такав да је $(\forall k < n) k \in \mathbb{N} \setminus X$. Ако би број n припадао X , онда би он био најмањи елемент скупа X , јер сваки k мањи од n припада $\mathbb{N} \setminus X$. Дакле, $n \in \mathbb{N} \setminus X$. Према принципу потпуне индукције закључујемо $\mathbb{N} \setminus X = \mathbb{N}$, односно $X = \emptyset$. $\square$

Принцип потпуне индукције заправо тврди да за сваки $S \subseteq \mathbb{N}$ важи:

$$(\forall n \in \mathbb{N})((\forall k < n) k \in S \Rightarrow n \in S) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) n \in S.$$

Наравно, за сваки $S \subseteq \mathbb{N}$ важи и

$$(\forall n \in \mathbb{N})((\forall k < n) k \in S^c \Rightarrow n \in S^c) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) n \in S^c,$$

одн. применом закона контрапозиције:

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N}) n \in S^c \Rightarrow \neg(\forall n \in \mathbb{N})((\forall k < n) k \in S^c \Rightarrow n \in S^c).$$

Последња формула се једноставно трансформише у еквивалентну формулу

$$\underbrace{(\exists n \in \mathbb{N}) n \in S}_{S \text{ је непразан}} \Rightarrow \underbrace{(\exists n \in \mathbb{N})((\forall k < n) k \notin S \wedge n \in S)}_{S \text{ има најмањи елемент}},$$

којом се тврди да сваки непразан подскуп од $\mathbb{N}$ има најмањи елемент.

²⁶ Уопштено говорећи, „обичном” индукцијом (по n) доказујемо формулу

$$(\forall k < n) k \in S.$$

Из $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k < n) k \in S$ следи $S = \mathbb{N}$.

Дефиниција 15. Уређење $\leq$ неког скупа X је **добро** ако сваки непразан подскуп од X има најмањи елемент у односу на $\leq$.

Дакле, скуп природних бројева је добро уређен скуп.

Теорема рекурзије омогућава да дефинишемо функције чији је домен $\mathbb{N}$, на начин који потпуно одговара „природи” скупа $\mathbb{N}$.

Теорема 15. [Принцип рекурзије] Нека је X неки скуп, $g \in X$ и $h : X \rightarrow X$. Тада постоји јединствена функција $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ таква да је

$$(\text{Rec}) \left| \begin{array}{l} f(0) = g, \\ f(n') = h(f(n)), n \in \mathbb{N}. \end{array} \right.$$

БЕЗ ДОКАЗА.

Користећи претходну теорему, уводимо основне аритметичке операције. Ако је $m \in \mathbb{N}$ неки фиксирани природан број, према теорему рекурзије, постоји јединствена функција $f_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, таква да је:

$$\begin{aligned} f_m(0) &= m \\ f_m(n') &= f_m(n)' \end{aligned}$$

Уместо $f_m(n)$ пишемо $m + n$. Уз овакво означавање, горње једнакости постају:

$$\begin{aligned} m + 0 &= m \\ m + n' &= (m + n)' \end{aligned}$$

Није тешко уочити да је $n' = n + 1$, за сваки природан број n .

Аналогно се уводе множење и степеновање:

$$\left| \begin{array}{l} m \cdot 0 = 0, \\ m \cdot n' = m + (m \cdot n). \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} m^0 = 1, \\ m^{n+1} = m \cdot m^n. \end{array} \right.$$

Сва позната својства ових операција и њихове везе са уређењем доказујемо математичком индукцијом (видети задатке ?? и ??, на страни ??).

Скуп природних бројева $\mathbb{N}$ је суштински одређен својим (почетним) елементом 0 и функцијом (следбеник) $' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Теорема рекурзије тврди да за било који скуп X , избрани елемент $a \in X$ и функцију $h : X \rightarrow X$, једнакости (Rec) одређују јединствену функцију $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

$$\begin{array}{ccc} 0 \in \mathbb{N} & \xrightarrow{' } & \mathbb{N} \\ \downarrow f & \downarrow \uparrow & \downarrow f \\ a \in X & \xrightarrow{h} & X \end{array} \quad \begin{array}{l} f(0) = a \\ f(n') = h(f(n)), \text{ тј. } f \circ '(n) = h \circ f(n) \end{array}$$

Уколико је X неки скуп, свака функција из $\mathbb{N}$ у X назива се и **низ** у скупу X . Низови су веома важни у свим областима

Истичемо да је свако добро уређење такође линеарно. Заиста, за свака два елемента x и y доброг уређења, подскуп $\{x, y\}$ има најмањи елемент, па мора бити $x \leq y$ или $y \leq x$. Наравно, обратно није тачно у општем случају: линеарно уређење не мора бити добро.

$$\begin{array}{ccc} 0 \in \mathbb{N} & \xrightarrow{' } & \mathbb{N} \\ \downarrow f & \downarrow \uparrow & \downarrow f \\ a \in X & \xrightarrow{h} & X \end{array} \quad \begin{array}{l} f(0) = g \\ f \circ '(n) = h \circ f(n) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 \in \mathbb{N} & \xrightarrow{' } & \mathbb{N} \\ f_m \downarrow & \downarrow \uparrow & \downarrow f_m \\ m \in \mathbb{N} & \xrightarrow{' } & \mathbb{N} \end{array}$$

математике, па се усвајају разни договори о ознакама. Аргумент функције (низа) $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ често се записује као индекс слова којим је функција означена: уместо $f(n)$ пише се f_n . У складу са тим, некада се уместо „ $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ ” пише „ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ”. Поред тога, како је $n' = n + 1$, уз претходне договоре, теорема рекурзије тврди да за изабране $a \in X$ и $h : X \rightarrow X$, постоји јединствени низ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ одређен једнакостима:

$$(\text{Rec}) \begin{cases} f_0 = a, \\ f_{n+1} = h(f_n), n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

За низ одређен једнакостима (Rec) кажемо да је **рекурзивно** (рекурентно, индуктивно) дефинисан.

21. Коначни скупови; Дирихлеов принцип

(е) Дирихлеов принцип (формулација) и последице; појам коначног скупа и основне особине

(у) Доказ Дирихлеовог принципа

Један од основних комбинаторних принципа познат је под називом *принцип куглица и кутија* или *Дирихлеов принцип*:

Ако m куглица распоредимо у n кутија, при чему је $m > n$, онда се у бар једној кутији налазе бар две куглице; другим речима, распоређивање куглица не може бити 1-1 (једнозначно).

Теорема 16. [Дирихлеов принцип] За свака два природна броја m и n , ако је $m > n$, онда не постоји 1-1 функција из m у n .

ДОКАЗ. Доказ изводимо индукцијом по n .

(БИ) Ако је $m > 0$, тада уопште не постоји функција из m у 0 ($m \neq \emptyset$ и $0 = \emptyset$), па тврђење тривијално важи.

(ИК) (ИП) Нека је n природан број такав да за било које $m > n$ не постоји 1-1 функција из m у n . Доказаћемо да тада за свако $m > n'$, такође не постоји 1-1 функција из m у n' .

Претпоставимо супротно: нека је $m > n'$ и $f : m \xrightarrow{1-1} n'$. Одавде следи да n ($n \in n'$) мора бити f -слика неког елемента из m , јер би у супротном постојала 1-1 функција из m у n , што није могуће. Такође, из $m > n'$, следи да постоји природан број k такав да је $m = k'$; $f : k \cup \{k\} \xrightarrow{1-1} n \cup \{n\}$. Како је $k' > n'$, према последици 2 (5) (страна 25) имамо да је $k > n$, па не постоји 1-1 функција из k у n . Разликујемо два случаја: $f(k) = n$ и $f(k) \neq n$.

1. случај: $f(k) = n$. Тада $f|_k : k \xrightarrow{1-1} n$, што је немогуће према (ИП).

2. случај: $f(k) \neq n$. Тада је $f(\ell) = n$, за неко $\ell \in k$, тј. $\ell < k$. Дефинишимо функцију $h : k' \rightarrow n'$ на следећи начин:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in k \wedge x \neq \ell \\ f(k), & x = \ell, \\ n, & x = k. \end{cases}$$

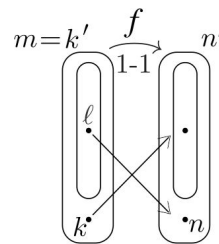
Није тешко уочити да $h : k' \xrightarrow{1-1} n'$ и да је $h(k) = n$. Међутим, тада $h|_k : k \xrightarrow{1-1} n$, што није могуће према (ИП). $\square$

Последица 3. Нека су m и n произвољни природни бројеви.

(1) Постоји 1-1 функција из m у n ако и само ако је $m \leq n$.

(2) Постоји бијекција између m и n ако и само ако је $m = n$.

Густав Лежен Дирихле (1805–1859), немачки математичар



Као што је добро познато, природним бројевима изражавамо „број” („количину”) елемената коначних скупова.

Дефиниција 16. Скуп X је **коначан** ако постоји бијекција између X и неког природног броја n , и у том случају пишемо $|X| = n$.

Према последици 3 (2), за сваки коначан скуп X постоји јединствен природан број n такав да је $|X| = n$ и тада кажемо да је n број елемената скупа X , одн. кардиналност скупа X једнака је n . Очигледно је $|n| = n$ за било који природан број n .

Теорема 17. Нека су X и Y неки коначни скупови. Тада важи:

- (1) $|X| = 0 \Leftrightarrow X = \emptyset$;
- (2) $|X| = |Y|$ ако и само ако постоји бијекција између X и Y .
- (3) $|X| \leq |Y|$ ако само ако постоји 1-1 функција из X у Y .

Доказ. (1) Тврђење директно следи из разматрања о функцијама из празног и у празан скуп са стране 8.

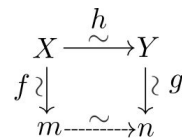
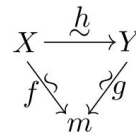
(2) Будући да су X и Y коначни скупови, постоје природни бројеви m и n и бијекције $f : X \xrightarrow{1-1} m$ и $g : Y \xrightarrow{1-1} n$.

($\Rightarrow$) Претпоставимо да је $m = n$. Треба да дефинишемо бијекцију између X и Y . На наредној слици, знаком $\sim$ изнад стрелице означавамо да је одговарајућа функција бијекција.

Функција $h : X \rightarrow Y$, дата са $h(x) = g^{-1} \circ f(x)$, јесте бијекција.

($\Leftarrow$) Нека је $h : X \xrightarrow{1-1} Y$ нека бијекција између X и Y . Тада се, аналогно претходном случају, дефинише бијекција између m и n , што према последици 3 (2) значи да је $m = n$, тј. $|X| = |Y|$.

(3) Доказ остављамо за вежбу. $\square$



22. Бесконачни скупови; теорема $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

(u) Упоредивање скупова по кардиналности; основна својства; доказ да је $|A| < |\mathcal{P}(A)|$; пребројиви и не-пребројиви скупови

Нису сви скупови коначни. На пример, скуп $\mathbb{N}$ није коначан: ако би за неки природан број n постојала бијекција $f : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} n$, онда би њена рестрикција на скуп n' била 1-1 функција, $f|_{n'} : n' \xrightarrow{1-1} n$, супротно Дирихлеовом принципу. Скупове који нису коначни називамо **бесконачним**.

Упоредивање бесконачних скупова по „броју” елемената дефинишемо по узору на тврдње (2) и (3) теореме 17, које се односе на коначне скупове.

Дефиниција 17. (1) Скупови A и B су **исте кардиналности** (имају исти број елемената), у ознаци $|A| = |B|$ ако постоји бијекција између A и B .

(2) Кардиналност скупа A је мања од или једнака кардиналности скупа B , у ознаци $|A| \leq |B|$ ако постоји 1-1 функција из A у B .

Теорема 18. За произвољне скупове A, B, C важи:

- (1) $|A| = |A|$;
- (2) ако је $|A| = |B|$, онда је $|B| = |A|$;
- (3) ако је $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, онда је $|A| = |C|$.

Доказ. (1) $\text{id}_A : A \xrightarrow{1-1} A$.

(2) Ако $f : A \xrightarrow{1-1} B$, онда $f^{-1} : B \xrightarrow{1-1} A$.

(3) Ако $f : A \xrightarrow{1-1} B$ и $g : B \xrightarrow{1-1} C$, онда $g \circ f : A \xrightarrow{1-1} C$. $\square$

Теорема 19. За произвољне скупове A, B, C важи:

- (1) $|A| \leq |A|$;
- (2) ако је $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |C|$, онда је $|A| \leq |C|$.

Доказ. Тврдње (1) директно следи из претходне теореме.

Тврдње (2) је последица чињенице да из $f : A \xrightarrow{1-1} B$ и $g : B \xrightarrow{1-1} C$ следи $g \circ f : A \xrightarrow{1-1} C$. $\square$

Теорема 20. [Кантор-Бернштајнова теорема] Нека су A и B било који скупови. Ако је $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, онда је $|A| = |B|$.

Феликс Бернштајн (1878–1956),
немачки математичар

БЕЗ ДОКАЗА.

Упоредивање бесконачних скупова по кардиналности (по броју елемената) има смисла, јер се испоставља да постоје

разне врсте бесконачности и да од сваког бесконачног скупа постоји неки „бесконачнији”, тј. веће кардиналности.

Дефиниција 18. Кардиналност скупа A је мања од кардиналности скупа B , у ознаци $|A| < |B|$, ако је $|A| \leq |B|$ и $|A| \neq |B|$.

Теорема 21. За сваки скуп A , $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.

Доказ. Није тешко уочити да је $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Заиста, функција $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$, $f(x) = \{x\}$, $x \in A$, јесте 1-1 функција.

Остаје још да покажемо да не постоји бијекција између A и $\mathcal{P}(A)$. Претпоставимо супротно, да $h : A \xrightarrow{1-1} \mathcal{P}(A)$. Дефинишимо скуп

$$K = \{x \in A \mid x \notin h(x)\}.$$

Очигледно $K \in \mathcal{P}(A)$, па пошто је h на функција, постоји $k \in A$ такав да је $h(k) = K$. Да ли k припада или не припада скупу K ?

1. *могућност:* $k \in K$. Из $h(k) = K$ следи $k \in h(k)$, што према дефиницији скупа K , значи да $k \notin K$. Контрадикција.

2. *могућност:* $k \notin K$. Из $h(k) = K$ следи $k \notin h(k)$, што према дефиницији скупа K , значи да $k \in K$. Контрадикција.

Из добијених контрадикција закључујемо да не постоји бијекција између A и $\mathcal{P}(A)$. $\square$

Доказ последње теореме је стар преко сто година. На основу доказане неједнакости можемо конструисати бесконачан, строго растући по кардиналности, низ бесконачних скупова:

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \dots < \underbrace{|\mathcal{P}(\dots \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \dots)|}_n < \dots$$