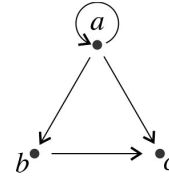


Име и презиме: _____

Максималан број поена је 5. У угластим заградама су наведени поени.

ЗАДАТАК 1. Над универзумом који чине три објекта a , b и c , графом десно је одређен бинарни предикат:

$R(x, y)$ — 'из x иде стрелица ка y '.



(а) [0.3] За које вредности променљиве x је формула $\forall y (R(y, x) \Rightarrow R(x, y))$ тачна?

a

(б) [0.3] За које вредности променљиве x је формула $\exists y R(x, y) \Rightarrow \exists y R(y, x)$ тачна?

a, b, c

(в) [0.2] Реченица $\exists y (\forall x R(x, y) \Rightarrow R(y, y))$ је (заокружити одговор): ТАЧНА НЕТАЧНА

(г) [0.2] Реченица $\exists y \forall x \neg R(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x R(y, x)$ је (заокружити): ТАЧНА НЕТАЧНА

(д) [0.5] Написати формулу $\alpha(x)$, без употребе симбола $=$, која је тачна само када променљива x добије вредности a или b .

$\exists x R(x, y)$

ЗАДАТАК 2. Дате су функције $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$ и $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(n) = 2n + 1$.

(а) [0.4] Одредити скупове $(f \circ g)[\{0, 1, 2, 3, 4\}]$ и $(f \circ g)^{-1}[\{0, 1, 2, 3, 4\}]$.

$$f \circ g(n) = (2n+1)^2$$

$$f \circ g[\{0, 1, 2, 3, 4\}] = \{1, 9, 25, 49, 81\}; (f \circ g)^{-1}[\{0, 1, 2, 3, 4\}] = \{0\}$$

(б) [0.3] Да ли је $g \circ f$ 1-1 функција? Детаљно образложити одговор.

Да.

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$$

$$2x_1^2 + 1 = 2x_2^2 + 1$$

$$x_1^2 = x_2^2$$

$$x_1 = x_2 \text{ јер } x_1, x_2 \in \mathbb{N}$$

(в) [0.3] Да ли је $g \circ f$ на функција? Детаљно образложити одговор.

Не. $\nexists$ пр. не постоји $x \in \mathbb{N}$ такав да је $g \circ f(x) = 2$, тј. једначина $2x^2 + 1 = 2$ нема решења у скупу $\mathbb{N}$.

ЗАДАТАК 3. (а) [0.5] Да ли за све скупове A и B из $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ следи $A = B$? Детаљно образложити одговор.

Да. Из $A \in \mathcal{P}(A)$, јер је $A \subseteq A$, и $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, следи
да $A \in \mathcal{P}(B)$, тј. $A \subseteq B$.
 Аналогно, из $B \in \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A)$ следи $B \subseteq A$.
Дакле, $A = B$.

(б) [0.5] Да ли за све скупове A и B из $\bigcup A = \bigcup B$ следи $A = B$? Детаљно образложити одговор.

Не. Пр. $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \neq B = \{\{\emptyset\}\}$, али
 $\bigcup A = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$, $\bigcup B = \{\emptyset\}$, тј. $\bigcup A = \bigcup B$.

[1.5]

ЗАДАТАК 4. [1] Доказати применом основних правила природне дедукције:

$\forall x ((A(x) \Rightarrow B(x)) \vee C(x)), \exists x \neg C(x), \forall x A(x) \vdash \exists x B(x)$

1. $\forall x ((A(x) \Rightarrow B(x)) \vee C(x))$ прет.
2. $\exists x \neg C(x)$ прет.
3. $\forall x A(x)$ прет.
4. $| \neg C(v)$ сведска ...
5. $| A(v) \quad \forall x E, 3, [x/v]$
6. $| (A(v) \Rightarrow B(v)) \vee C(v) \quad \forall x E, 1, [x/v]$
7. $| | A(v) \Rightarrow B(v)$ допшта прет.
8. $| | B(v) \quad \Rightarrow E, 5, 7$
9. $| | C(v) \quad \underline{\text{дошта}} \text{ прет.}$
10. $| | \perp \quad \neg E, 9, 4$
11. $| B(v) \quad \perp E, 10$
12. $| B(v) \quad \vee E, 6, 7-8, 9-11$
13. $| \exists x B(x) \quad \exists x I, 12$
14. $\exists x B(x) \quad \exists x E, 2, 4-13$