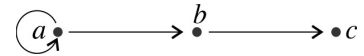


Име и презиме: _____

Максималан број поена је 5. У угластим заградама су наведени поени.

ЗАДАТАК 1. Над универзумом који чине три објекта a , b и c , графом десно је одређен бинарни предикат:



$R(x, y)$ — 'из x иде стрелица ка y '.

(а) [0.3] За које вредности променљиве x је формула $\forall y (R(y, x) \Rightarrow R(x, y))$ тачна?

a

(б) [0.3] За које вредности променљиве x је формула $\exists y R(x, y) \Rightarrow \exists y R(y, x)$ тачна?

a, b, c

(в) [0.2] Реченица $\forall x \exists y (R(x, y) \Rightarrow R(y, x))$ је (заокружити одговор): ТАЧНА НЕТАЧНА

(г) [0.2] Реченица $\forall x \exists y \neg R(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x \neg R(y, x)$ је (заокружити): ТАЧНА НЕТАЧНА

(д) [0.5] Написати формулу $\alpha(x)$, без употребе симбола $=$, која је тачна само када променљива x добије вредности a или c .

$$R(x, x) \vee \neg \exists y R(x, y)$$

" x има петљу или не постоји стрелица из x "

ЗАДАТАК 2. (а) [0.6] Доказати да је за све скупове A , B и C тачна инклузија:

$$(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C).$$

$$x \in (A \setminus B) \setminus C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$$

$$x \in A \setminus (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \wedge \neg (x \in B \wedge x \notin C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$

$$p: x \in A$$

$$q: x \in B$$

$$r: x \in C$$

$$p \wedge \neg q \wedge \neg r \Rightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge r) \text{ је тавтологија}$$

(б) [0.2] Навести примере скупова A , B и C , ако постоје, за које инклузија

$$A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C$$
 није тачна.

$$A = C = \{0\}, B = \emptyset$$

$$A \setminus (B \setminus C) = \{0\} \setminus (\emptyset \setminus \{0\}) = \{0\} \setminus \emptyset = \{0\} \quad \{0\} \not\subseteq \emptyset$$

$$(A \setminus B) \setminus C = (\{0\} \setminus \emptyset) \setminus \{0\} = \{0\} \setminus \{0\} = \emptyset$$

(в) [0.2] Навести примере скупова A , B и C , ако постоје, за које инклузија

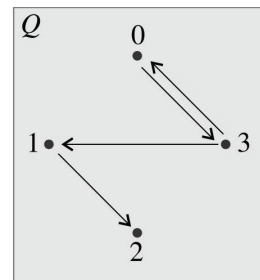
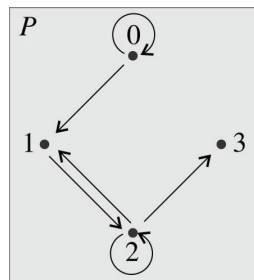
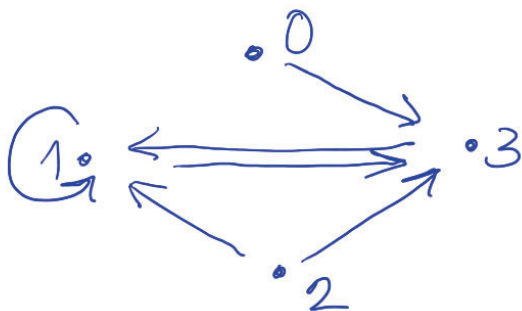
$$A \setminus (B \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \setminus C$$
 јесте тачна.

$$A = B = C = \emptyset$$

$$A \setminus (B \setminus C) = \emptyset; (A \setminus B) \setminus C = \emptyset; \emptyset \subseteq \emptyset$$

ЗАДАТАК 3. Графовима су одређене две бинарне релације, P и Q скупа $\{0, 1, 2, 3\}$.

(а) [0.4] Нацртати граф релације $(P \circ Q)^{-1}$.



(б) [0.3] Да ли је $(P \circ Q)^{-1}$ транзитивна релација? Детаљно образложити одговор.

Не, нпр. $(0, 3) \in (P \circ Q)^{-1}$, $(3, 1) \in (P \circ Q)^{-1}$
 $(0, 1) \notin (P \circ Q)^{-1}$

(в) [0.3] Да ли је $(P \circ Q)^{-1}$ антисиметрична релација? Детаљно образложити одговор.

Не: $(1, 3) \in (P \circ Q)^{-1}$, $(3, 1) \in (P \circ Q)^{-1}$
 $1 \neq 3$

ЗАДАТАК 4. [1.5] Доказати применом основних правила природне дедукције:

$\forall x (A(x) \Rightarrow B(x) \vee C(x)), \exists x \neg B(x), \forall x A(x) \vdash \exists x C(x)$

1. $\forall x (A(x) \Rightarrow B(x) \vee C(x))$ прет.
2. $\exists x \neg B(x)$ прет.
3. $\forall x A(x)$ прет.
4. $v \neg B(v)$ сведка ...
5. $A(v) \quad \forall x \in, 3, [x/v]$
6. $A(v) \Rightarrow B(v) \vee C(v) \quad \forall x \in, 1, [x/v]$
7. $B(v) \vee C(v) \Rightarrow \text{E}, 5, 6$
8. $B(v)$ додата прет.
9. $\perp \quad \neg \text{E}, 8, 4$
10. $C(v) \quad \perp \text{E}, 9$
11. $C(v)$ додата прет.
12. $C(v) \quad \vee \text{E}, 7, 8-10, 1-1$
13. $\exists x C(x) \quad \exists \text{I}, 12$
14. $\exists x C(x) \quad \exists \text{E}, 2, 4-13$