

Čist predikatski jezik

N. Ikodinović

Rečenice predikatske logike

Čist predikatski jezik opisuje izvesne *objekte* pomoću unapred izabranih *predikata*. Koristeći imena objekata sa izabranim predikatima gradimo osnovne rečenice predikatskog jezika (koje odgovoraju tipičnim prostim rečenicama govornog jezika)

Univerzum (diskurs):

Ana	Bane	Cane	Dana	Eva	Filip
a	b	c	d	e	f

Predikati:

'... je muzičar'	'... je dizajner'	'... prati ...'
$M(\cdot)$	$D(\cdot)$	$P(\cdot, \cdot)$

Atomske rečenice:

Ana je dizajner.	Ana je muzičar.	Bane prati Evu.	itd.
$D(a)$	$M(a)$	$F(b, e)$	itd.

Koliko ukupno atomskih rečenica se može napraviti?

$$6^1 + 6^1 + 6^2 = 48$$

Nelogički simboli (vokabular)

Za izgradnju atomskih rečenica koristimo dve vrste simbola:

- simbole konstanti (imena za individue univerzuma); uglavnom ćemo ih označavati malim slovima iz prvog dela abecede, eventualno sa indeksima: $a, b, c, d, a_1, \dots$;
- simbole za predikate pri čemu je za svaki predikat određena njegova dužina; uglavnom ćemo ih označavati velikim slovima latinice, eventualno sa indeksima: $A, B, C, \dots, A_1, \dots$

Atomske rečenice: Predikat($\underbrace{\quad, \dots, \quad}_{\text{mesta za simbole konstanti}}$)

Npr.

- simboli konstanti: a, b, c, d, a_1
- simboli za predikate: $A(\cdot), B(\cdot, \cdot), C(\cdot, \cdot, \cdot)$, pri čemu je dužina predikata određena brojem tačaka između zagrada, tj. brojem mesta za upisivanje simbola konstanti.

Atomske rečenice: $A(a), A(d), B(b, a_1), B(c, c), C(d, a, d)$, itd.

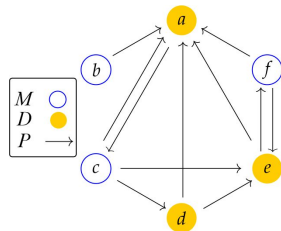
Valuacija atomskih rečenica

Valuacija atomskih rečenica je funkcija koja svim atomskim rečenicama dodeljuje istinitosne vrednosti iz $\{0, 1\}$.

$M(a)$	$M(b)$	$M(c)$	$M(d)$	$M(e)$	$M(f)$	
$D(a)$	$D(b)$	$D(c)$	$D(d)$	$D(e)$	$D(f)$	
$P(a, a)$	$P(a, b)$	$P(a, c)$	$P(a, d)$	$P(a, e)$	$P(a, f)$	
$P(b, a)$	$P(b, b)$	$P(b, c)$	$P(b, d)$	$P(b, e)$	$P(b, f)$	
$P(c, a)$	$P(c, b)$	$P(c, c)$	$P(c, d)$	$P(c, e)$	$P(c, f)$	
$P(d, a)$	$P(d, b)$	$P(d, c)$	$P(d, d)$	$P(d, e)$	$P(d, f)$	
$P(e, a)$	$P(e, b)$	$P(e, c)$	$P(e, d)$	$P(e, e)$	$P(e, f)$	
$P(f, a)$	$P(f, b)$	$P(f, c)$	$P(f, d)$	$P(f, e)$	$P(f, f)$	

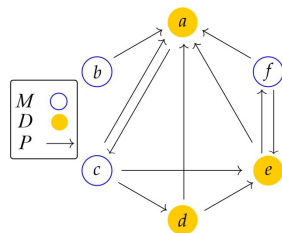
Ako je I valuacija atomskih rečenica, onda predikatskom simbolu R dužine k odgovara istinitosna funkcija R^I dužine k .

x	$M^I(x)$	x	$D^I(x)$	P^I	a	b	c	d	e	f
a	0	a	1	a	0	0	1	0	0	0
b	1	b	0	b	1	0	0	0	0	0
c	1	c	0	c	1	0	0	1	1	0
d	0	d	1	d	1	0	0	0	1	0
e	1	e	1	e	1	0	0	0	0	1
f	0	f	0	f	1	0	0	0	1	0



Valuacije atomskih rečenica

x	$M^I(x)$	x	$D^I(x)$	P^I	a	b	c	d	e	f
a	0	a	1	a	0	0	1	0	0	0
b	1	b	0	b	1	0	0	0	0	0
c	1	c	0	c	1	0	0	1	1	0
d	0	d	1	d	1	0	0	0	1	0
e	1	e	1	e	1	0	0	0	0	1
f	0	f	0	f	1	0	0	0	1	0



Iznad je definisana **samo jedna** interpretacija nelogičkih simbola (vokabulara): $a, b, c, d, e, f, M(\cdot), D(\cdot), P(\cdot, \cdot)$.

Koliko ukupno ima interpretacija navedenog vokabulara, tj. koliko ima valuacija atomskih rečenica? ($6^1 + 6^1 + 6^2 = 48$)

$$2^{48} = 281\,474\,976\,710\,656$$

(Koliko bi vremena bilo potrebno da se izlistaju sve interpretacije, ako se pretpostavi da se jedna interpretacija generiše za jednu sekundu?)

281 474 976 710 656 sekundi > 8 900 000 godina.)

nelogički simboli (vokabular)

- simboli konstanti (individue univerzuma); uglavnom ćemo ih označavati malim slovima iz prvog dela abecede, eventualno sa indeksima: $a, b, c, d, a_1, \dots$;
- simboli zapredikate; uglavnom ćemo ih označavati velikim slovima latinice, eventualno sa indeksima: $A, B, C, A_1, \dots$;

logički simboli

- promenljive; uglavnom ćemo ih označavati malim slovima s kraja abecede, eventualno sa indeksima: $x, y, z, x_1, \dots$
- veznici: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$;
- kvantifikatori: postoji $\exists$, za sve $\forall$.

Atomske formule: Predikat($\underbrace{\quad, \dots, \quad}_{\text{mesta za konstante ili promenljive}}$)

Npr. $A(a)$, $A(x)$, $B(x)$, $F(x, y)$, $F(x_2, y_1)$, etc. $F(z_1, z_1)$

Formule:

- Svaka atomska formula je formula;
- Ako su α i β formule, onda su i $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$, $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ formule.
- Ako je x promenljiva and α formula, onda su $\forall x \alpha$ i $\exists x \alpha$ formule.

Npr.

$\neg P(a, b)$	$M(x) \wedge \neg P(a, x)$	$\forall y D(y)$
$\exists x P(a, x) \wedge \neg \exists x P(x, y)$	$D(x) \vee \forall x D(x)$	$\forall x \exists y P(x, y)$
$\forall x (\forall y P(x, y) \vee P(y, x))$	$M(z) \vee \exists y D(y) \Rightarrow$	$\forall z (P(x, z) \wedge P(z, y))$

itd.

Promenljiva se može pojavljivati **slobodno** or **vezano** u formuli:

Npr.

$$\begin{array}{lll} \neg P(a, b) & M(x) \wedge \neg P(a, x) & \forall y D(y) \\ \exists x P(a, x) \wedge \neg \exists x P(x, y) & D(x) \vee \forall x D(x) & \forall x \exists y P(x, y) \\ \forall x (\forall y P(x, y) \vee P(y, x)) & M(z) \vee \exists y D(y) \Rightarrow \forall z (P(x, z) \wedge P(z, y)) & \end{array}$$

itd.

Formulu α označavamo $\alpha(x_1, \dots, x_k)$ kada želimo da naglasimo da su sve promenljive koje se slobodno pojavljuju u α neke od promenljivih $x_1, \dots, x_k$.

Npr. formula α :

$$M(x) \vee D(y) \Rightarrow \forall z (P(y, z) \wedge P(z, y))$$

could be denoted $\alpha(x, y)$, ali i $\alpha(x, y, z)$, $\alpha(x, y, x_1, y_2)$ itd.

Rečenica je formula u kojoj se nijedna promenljiva ne pojavljuje slobodno.

Npr.

$$\neg P(a, b)$$

$$\exists x P(a, x) \wedge \neg \exists x P(x, y)$$

$$\forall x (\forall y P(x, y) \vee P(y, x))$$

$$\forall x \forall y (P(x, y) \vee P(y, x))$$

itd.

$$M(x) \wedge \neg P(a, x) \quad \forall y D(y)$$

$$D(x) \vee \forall x D(x) \quad \forall x \exists y P(x, y)$$

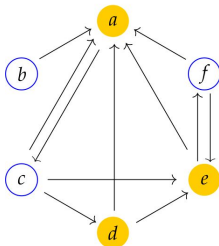
$$M(z) \vee \exists y D(y) \Rightarrow \forall z (P(x, z) \wedge P(z, y))$$

$$M(b) \vee \exists y D(y) \Rightarrow \forall z (\forall x P(x, z) \wedge P(z, e))$$

Formule kao istinitosne funkcije

Ako je I neka valuacija atomskih rečenica, tada svaka formula $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ određuje jednu istinitosnu funkciju $\alpha^I(x_1, \dots, x_n)$ čije vrednosti zavise od tzv. valuacije promenljivih, tj. konstanti kojima su zamenjene promenljive.

Npr.



Ako je $\alpha(x, y)$ formula $\neg M(x) \Rightarrow P(x, y)$, onda je:

- $\alpha^I(a, a) = 0$
- $\alpha^I(a, b) = 0$
- $\alpha^I(b, a) = 1$
- $\alpha^I(b, c) = 1$
- $\alpha^I(d, e) = 1$
- $\alpha^I(e, d) = 0$

itd.

Formule kao istinitosne funkcije

Ako je $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ atomska rečenica, onda je vrednost $\alpha^I(c_1, \dots, c_n)$, gde su $c_1, \dots, c_n$ neke konstante odredjena valuacijom I .

Ako je $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ složenija formula, onda je vrednost $\alpha^I(c_1, \dots, c_n)$ definisana induktivno po složenosti formule α :

- ako je $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ oblika $\neg\theta(x_1, \dots, x_n)$, onda je:

$$\alpha^I(c_1, \dots, c_n) = \neg\theta^I(c_1, \dots, c_n)$$

- ako je $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ oblika $\theta_1(x_1, \dots, x_n) * \theta_2(x_1, \dots, x_n)$, gde je $*$ neki od logičkih veznika, onda je:

$$\alpha^I(c_1, \dots, c_n) = \theta_1^I(c_1, \dots, c_n) * \theta_2^I(c_1, \dots, c_n)$$

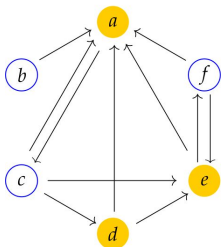
- ako je $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ oblika $\forall x\theta(x, x_1, \dots, x_n)$, onda je:

$$\alpha^I(c_1, \dots, c_n) = \min\{\theta^I(c, c_1, \dots, c_n) : c \text{ je konstanta}\}$$

- ako je $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ oblika $\exists x\theta(x, x_1, \dots, x_n)$, onda:

$$\alpha^I(c_1, \dots, c_n) = \max\{\theta^I(c, c_1, \dots, c_n) : c \text{ je konstanta}\}$$

Formule kao istinitosne funkcije



Kada je jasno o kojoj interpretaciji je reč, uglavnom se izostavlja gornji indeks **I**, već se samo podrazumeva.

Npr.

Ako je $\alpha(y)$ formula $\exists x P(x, y) \wedge \exists x P(y, x)$, onda je:
($\alpha(y)$: postoji strelica ka y i postoji strelica iz y)

- $\alpha^I(a) = 1$ ($\alpha^I(a)$: postoji strelica ka a i postoji strelica iz a)
- $\alpha^I(b) = 0$ ($\alpha^I(b)$: postoji strelica ka b i postoji strelica iz b)
- $\alpha^I(c) = 1$
- $\alpha^I(d) = 1$

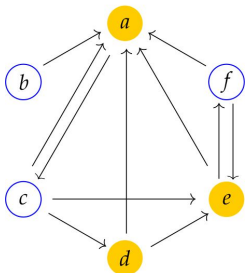
Ako je $\beta(x)$ formula $\forall z (P(z, x) \Rightarrow P(x, z))$, onda je:
($\beta(x)$: za svaki čvor važi da ako iz čvora ide strelica ka x , onda i iz x ide strelica ka tom čvoru)

- $\beta^I(a) = 0$
- $\beta^I(b) = 1$
- $\beta^I(c) = 1$
- $\beta^I(d) = 0$

Valuacije rečenica

Istinitosna vrednost rečenice (formule u kojoj nema promenljivih sa slobodnim pojavljivanjem) zavisi samo od interpretacije vokabulara.
Npr.

M ○
 D ●
 $P \longrightarrow$



$$(\neg P(a, b) \wedge P(b, a))^I = 1$$

$$(\forall x P(x, a))^I = 0$$

$$(\exists x P(x, b))^I = 0$$

$$\forall x \forall y (P(x, y) \Rightarrow P(y, x)) = 0$$

$$\exists x \exists y (P(x, y) \wedge P(y, x)) = 1$$

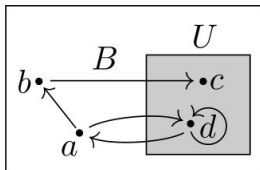
$$\exists y \forall x \neg P(x, y) = 1$$

$$\forall x (M(x) \vee \exists y (P(x, y) \wedge M(y))) = 0$$

$$\forall x (M(x) \vee \exists y (P(y, x) \wedge M(y))) = 1$$

Zadatak 1

Na univerzumu koji čine objekti a, b, c, d, e , definisana su dva predikata: unarni U i binarni B , sledećim tablicama:



x	$U(x)$
a	0
b	0
c	1
d	1

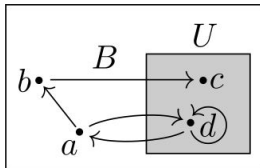
B	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	0	1	0
c	0	0	0	0
d	1	0	0	1

(a) Odrediti istinitosnu vrednost formule sa jednom slobodnom promenljivom x , u zavisnosti od vrednosti dodeljene promenljivoj x .

x	$U(x) \Rightarrow B(x, x)$	$U(x) \vee \neg B(x, x)$	$U(x) \wedge B(x, x)$
a	1	1	0
b	1	1	0
c	0	1	0
d	1	1	1

Zadatak 1

Na univerzumu koji čine objekti a, b, c, d, e , definisana su dva predikata: unarni U i binarni B , sledećim tablicama:



x	$U(x)$
a	0
b	0
c	1
d	1

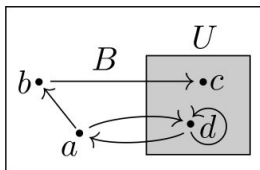
B	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	0	1	0
c	0	0	0	0
d	1	0	0	1

(b) Odrediti istinitosnu vrednost formule sa dve slobodne promenljive x, y , u zavisnosti od vrednosti koje su dodeljene promenljivama x i y .

x	a	a	a	a	b	b	b	b	c	c	c	c	d	d	d	d
y	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d
$U(x) \wedge U(y) \Rightarrow \neg B(x, y)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
$\neg(U(x) \vee U(y)) \wedge B(x, y)$	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\neg U(x) \wedge B(x, y) \Rightarrow U(y)$	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$B(x, y) \vee B(y, x)$	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
$B(x, y) \vee \neg B(x, y)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Zadatak 1

Na univerzumu koji čine objekti a, b, c, d, e , definisana su dva predikata: unarni U i binarni B , sledećim tablicama:



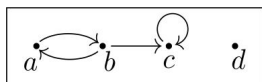
x	$U(x)$
a	0
b	0
c	1
d	1

B	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	0	0	1	0
c	0	0	0	0
d	1	0	0	1

(v) Ispitati tačnost sledećih rečenica:

- $\exists x(U(x) \Rightarrow B(x, x))$ 1
- $\neg \forall x(U(x) \Rightarrow B(x, x))$ 1
- $\forall x(B(x, x) \Rightarrow U(x))$ 1
- $\forall x \exists y(B(x, y) \wedge U(x))$ 0
- $\forall x \exists y(B(x, y) \wedge U(y))$ 0
- $\forall x(\neg U(x) \Rightarrow \exists y(U(y) \wedge B(x, y)))$ 1

Zadatak 2



Na univerzumu od četiri objekta, a , b , c , d , definisan je binarni predikat:

$E(x, y)$ – 'iz x ide strelica ka y '

(a) Odrediti formulu $\alpha(x)$ koja će biti tačna samo kada promenljiva x dobije neku od vrednosti:

- a , b i c (a netačna je za d);

$$\exists y E(x, y)$$

- b (a netačna je za a , c i d);

$$\exists y (E(x, y) \wedge E(y, y)) \wedge \exists y (E(x, y) \wedge \neg E(y, y))$$

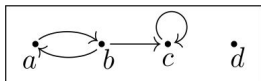
- b i c (a netačna je za a i d);

$$\exists y (E(x, y) \wedge E(y, y))$$

- a i b (a netačna je za c i d).

$$\neg E(x, x) \wedge \exists y E(x, y)$$

Zadatak 2



Na univerzumu od četiri objekta, a , b , c , d , definisan je binarni predikat:

$E(x, y)$ – 'iz x ide strelica ka y '

(b) Ispitati tačnost sledećih rečenica:

- $\exists x \forall y \neg E(x, y)$ 1
- $\forall x (E(x, x) \wedge \neg \exists y E(y, x) \Rightarrow \forall z E(x, z))$ 1
- $\forall x (\neg \exists y E(x, y) \Rightarrow \neg E(x, x))$ 1
- $\forall x (\exists y E(x, y) \Rightarrow \exists z E(z, x))$ 1