

Универзитет у Београду, Факултет за физичку хемију
МАТЕМАТИКА 1, школска 2024/25 година
Теоријска питања и задаци за припрему колоквијума и испита

Заснивање скупова природних, целих, рационалних и реалних бројева

1. (а) Формулисати Аксиому (принцип) математичке индукције, као једну од Пеанових аксиома.

(б) Нека је $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \right\}$. Доказати да је $A = \mathbb{N}$.

(в) Нека је $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n \geq n^2\}$. Одредити скуп A .

2. Применом принципа математичке индукције, "доказаћемо" следеће тврђење: У произвољном скупу од n коња, сви коњи су исте боје.

Уколико је $n = 1$, тврђење је тачно (један коњ је само једне боје). Претпоставимо да је тврђење тачно за произвољан скуп од n коња и докажимо да одатле следи да је тачно и за произвољан скуп од $n + 1$ коња. Нека је $\{H_1, H_2, \dots, H_{n+1}\}$ произвољан скуп од $n + 1$ коња. У скупу $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ има n коња, па на основу индуктивне претпоставке сви они су исте боје (назовимо је боја A). Слично тако, у скупу $\{H_2, \dots, H_n, H_{n+1}\}$ има n коња, па на основу индуктивне претпоставке сви они су исте боје (назовимо је боја B). Како ова два скупа имају бар једног заједничког коња (нпр. коњ H_2), боје A и B морају бити исте, па су свих $n + 1$ коња исте боје.

Открити грешку у претходном доказу, с обзиром да тврђење које смо "доказали" очигледно није тачно.

3. Формулисати преостале Пеанове аксиоме.

4. Објаснити шта значи да је $(\mathbb{N}, +)$ полугрупа, а $(\mathbb{N}_0, +)$ моноид (полугрупа са неутралом). Зашто ове структуре нису групе?

5. Формулисати особине скупа $\mathbb{N}$ које се односе на међусобно слагање бинарних операција $+$ и $\cdot$, као и њихово слагање са бинарном релацијом $\leq$.

6. Објаснити шта значи да је $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ прстен. Зашто ова структура није поље?

7. Користећи релацију $\leq$, дефинишу се релације $\geq, <, >$ на скупу $\mathbb{Z}$ на следећи начин:

$x \geq y$ ако и само ако је $y \leq x$; $x < y$ ако и само ако је $x \leq y$ и $x \neq y$; $x > y$ ако и само ако је $y \leq x$ и $x \neq y$.

Да ли су то релације поретка?

8. Доказати да у скупу целих бројева важи:

(а) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$ (закон скраћивања за сабирање);

(б) $x + y = x \Rightarrow y = 0$ (јединственост неутрала за сабирање);

(в) $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$ (јединственост супротног елемента за сабирање);

(г) $-(x + y) = (-x) + (-y)$.

9. (а) Дефинисати операцију одузимања у скупу целих бројева.

(б) Доказати да једначина $a + x = b$ има јединствено решење у скупу целих бројева ($a, b \in \mathbb{Z}$).

10. Објаснити шта значи да је $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ линеарно уређено поље.

11. Доказати да у скупу рационалних бројева важи:

(а) $x \cdot y = x \cdot z$ и $z \neq 0 \Rightarrow y = z$ (закон скраћивања за множење);

(б) $x \cdot y = x$ и $x \neq 0 \Rightarrow y = 1$ (јединственост неутрала за множење);

(в) $x \cdot y = 1 \Rightarrow x \neq 0$ и $y = x^{-1}$ (јединственост инверзног елемента за множење);

(г) $x \cdot 0 = 0$, $x \cdot (-1) = -x$;

(д) $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ или $y = 0$;

(ђ) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$;

(е) $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.

12. (а) Дефинисати операцију дељења у скупу рационалних бројева.
 (б) Доказати да једначина $a \cdot x = b$ има јединствено решење у скупу рационалних бројева ($a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{Q}$).
13. Доказати да у скупу рационалних бројева важи:
 (а) $x + z \leq y + z \Rightarrow x \leq y$;
 (б) $x \cdot z \leq y \cdot z$ и $z > 0 \Rightarrow x \leq y$.
14. Формулисати Архимедово својство у пољу $\mathbb{R}$. Да ли оно важи и у пољу $\mathbb{Q}$?
15. Које аксиоме поља $\mathbb{R}$ важе и у пољу $\mathbb{Q}$?
16. (а) Формулисати Аксиому супремума у скупу $\mathbb{R}$.
 (б) Навести пример одозго ограниченог подскупа скупа $\mathbb{Q}$, који нема супремум у $\mathbb{Q}$, а његов супремум у $\mathbb{R}$ износи $\sqrt{5}$.
17. (а) Формулисати аксиому инфимума у скупу $\mathbb{R}$.
 (б) Навести пример одоздо ограниченог подскупа скупа $\mathbb{Q}$ који нема инфимум у $\mathbb{Q}$, а његов инфимум у $\mathbb{R}$ износи $\sqrt{5}$.
18. Одредити (ако постоје) инфимум, супремум, минимум, максимум скупа $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid 3 \leq x^2 < 4\}$, прво у пољу $\mathbb{Q}$, а затим у пољу $\mathbb{R}$.
19. (а) Навести ε -карактеризацију супремума и инфимума.
 (б) Доказати да је $\inf \left\{ \frac{3}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 0$, $\sup \left\{ \frac{n-3}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 1$. Шта је супремум првог скупа? А инфимум другог скупа?
20. Представити следеће рационалне бројеве, записане у облику децималном облику, у облику разломка:
 $1,2333\dots$, $-6,818181\dots$, $4,559999\dots$, $0,285714285714\dots$.
21. Доказати да су следећи рационални бројеви представљени у сведеном облику и да имају бесконачан децимални запис (за све $n \in \mathbb{N}$): (а) $\frac{n}{2n^2 + 1}$; (б) $\frac{n}{n^2 + n + 1}$.
22. (а) Доказати да су збир и разлика једног рационалног и једног ирационалног броја ирационални бројеви.
 (б) Доказати да су производ и количник рационалног броја различитог од нуле и произвољног ирационалног броја ирационални бројеви.
 (в) Да ли збир, разлика, производ, количник произвољна два ирационална броја мора бити ирационалан број?
23. Доказати да су следећи бројеви ирационални:
 $\sqrt{3}$, $2024 + \sqrt{3}$, $\frac{1}{2024 - \sqrt{3}}$, $\sqrt{3} + \sqrt{2024}$, $\frac{1}{\sqrt{2024} - \sqrt{3}}$.
24. (а) Уколико за рационалне бројеве a, b, c, d важи $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, доказати да је $a = c$ и $b = d$. Да ли тврђење важи и за реалне бројеве a, b, c, d ?
 (б) Доказати да скуп $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ има структуру уређеног поља у односу на стандардне бинарне операције $+$ и $\cdot$ и бинарну релацију $\leq$.
25. (а) Доказати да се између свака два рационална броја налази рационалан број.
 (б) Доказати да се између сваког рационалног и ирационалног броја налази ирационалан број.

Скуп комплексних бројева

1. Дефинисати скуп $\mathbb{C}$ комплексних бројева и две бинарне операције $+$ и $\cdot$ на њему. Доказати да је $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ једно поље.
2. Дефинисати имагинарну јединицу i . Израчунати i^n , у зависности од природног броја n .
3. (а) Дефинисати алгебарски облик комплексног броја и функције реални део и имагинарни део.
(б) Доказати да су два комплексна броја у алгебарском облику једнака ако и само ако су им једнаки реални и имагинарни део.
4. Дефинисати комплексну раван и њене координатне осе.
5. Дефинисати бинарне операције одузимања и дељења комплексних бројева у алгебарском облику.
6. Дати геометријску интерпретацију у комплексној равни сабирања и одузимања комплексних бројева.
7. Дефинисати функцију модуо комплексног броја и дати геометријску интерпретацију у комплексној равни.
8. Доказати неједнакости $\operatorname{Re} z \leq |z|$ и $\operatorname{Im} z \leq |z|$.
9. Извести формулу $|z_1 - z_2|$ за растојање између два комплексна броја у комплексној равни.
10. Дефинисати функцију конјуговање на скупу комплексних бројева и дати њену геометријску интерпретацију у комплексној равни.
11. Доказати да важе формуле $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
12. Доказати да се конјуговање слаже са операцијама сабирања, одузимања, множења, дељења.
13. Доказати да се модуо слаже са операцијама множења и дељења, али се не слаже са операцијама сабирања и одузимања.
14. Доказати неједнакости троугла $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ и $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Када важи једнакост у овим неједнакостима?
15. Доказати да важи $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Одредити алгебарски облик комплексног броја $\frac{1}{z}$.
16. Дефинисати тригонометријски облика комплексног броја. Објаснити везу са поларним координатама. Шта је модуо и аргумент бројева на реалној и имагинарној оси?
17. Одредити тригонометријски облик комплексног броја $\frac{1}{z}$, ако је $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$.
18. Објаснити зашто за комплексан број $z = a + ib$, $a \neq 0$, није увек тачно да је његов аргумент $\operatorname{arctg} \frac{b}{a}$. Када ова формула ипак важи?
19. Извести формуле за множење и дељење комплексних бројева у тригонометријском облику.
20. Формулисати и доказати Муаврову формулу. Применити Муаврову формулу на рачунање броја $(i - 1)^{2024}$.
21. Одредити сва решења, у скупу комплексних бројева, једначине $z^n = \omega$, за дати природан број n и комплексан број $\omega \neq 0$. Колико има различитих решења?
22. Доказати да сва решења ове једначине представљају темена правилног n -тоугла у комплексној равни, чији је центар координатни почетак. Илустровати на примеру једначине $z^4 = -16i$.
23. (а) Дефинисати n -ти корен комплексног броја. Да ли је то добро дефинисана функција у скупу комплексних бројева?
(б) Објаснити грешку у следећем расуђивању $-1 = i^2 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$.
24. Доказати да n -ти корени из јединице чине групу у односу на операцију множења комплексних бројева.
25. (а) Формулисати Основну теорему (став) алгебре.
(б) Раставити полиноме $x^3 - 8$, $x^4 + 4$ и $x^6 + 2x^3 + 1$ у $\mathbb{R}[x]$ и $\mathbb{C}[x]$ (скупови полинома са реалним и са комплексним коефицијентима).

1. Дефинисати векторски простор $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ над пољем $\mathbb{R}$.
2. Доказати да за сваки векторски простор $\mathbb{V}$, произвољан вектор $x \in \mathbb{V}$ и произвољан скалар $\alpha \in \mathbb{R}$ важи:
(а) $\alpha \cdot (-x) = (-\alpha) \cdot x = -\alpha \cdot x$; (б) $0 \cdot x = \mathbf{0}$; (в) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ је нула-вектор).
3. Дефинисати стандардне операције сабирања и множења скаларом на скупу $\mathbb{R}^n$. Доказати да је тако добијена структура $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ векторски простор.
4. Дефинисати стандардне операције сабирања и множења скаларом на скупу свих: (а) матрица фиксираних формата; (б) полинома; (в) функција $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ са неког непразног скупа $S \subset \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$, које снабдевају ове скупове структуром векторског простора.
5. (а) Дефинисати линеарну комбинацију вектора неког скупа $\mathcal{B} \subset \mathbb{V}$.
(б) Дефинисати генераторни скуп вектора (генератрису).
6. Дефинисати линеарно независан скуп вектора. Да ли тај скуп може да садржи нула-вектор? Да ли тај скуп може бити бесконачан?
7. Дефинисати базу векторског простора.
8. Формулисати Теорему о бази векторског простора.
9. Дефинисати димензију векторског простора. Навести пример два различита векторска простора димензије 5, као и једног бесконачнодимензионог векторског простора.
10. Доказати да је број елемената линеарно независног скупа мањи или једнак од димензије (коначнодимензионог) векторског простора, док је број елемената генератрисе већи или једнак од димензије простора.
11. Дефинисати канонску базу векторског простора $\mathbb{R}^n$. Шта је база векторског простора $\mathbb{R}[x]$ свих полинома са реалним коефицијентима?
12. (а) Дефинисати координате вектора у некој фиксираној бази произвољног векторског простора.
(б) Доказати да вектори $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$ чине базу векторског простора $\mathbb{R}^4$, па затим одредити координате вектора $(3, 2, 1, 0)$ у овој бази.
13. Дефинисати координатно пресликавање (координатизацију) између произвољног векторског простора $\mathbb{V}$ и простора $\mathbb{R}^n$. Која својства има ово пресликавање?
14. Дефинисати потпростор векторског простора. Да ли је скуп $\mathbb{R}^n[x]$ свих полинома степена највише n потпростор векторског простора $\mathbb{R}[x]$ свих полинома са реалним коефицијентима?
15. (а) Доказати да је неки подскуп векторског простора уједно и његов потпростор ако и само ако је затворен за све линеарне комбинације свака два своја вектора.
(б) Доказати да скуп $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + 4z = 0\}$ јесте, док скуп $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + 4z = 5\}$ није векторски потпростор од $\mathbb{R}^3$. Шта је димензија првог потпростора?
16. Доказати да је пресек два векторска потпростора опет потпростор. Да ли слично тврђење важи и за унију?
17. Дефинисати линеал $\mathcal{L}(S)$ датог скупа $S \subset \mathbb{V}$. Навести неке од основних особина које линеал задовољава. Шта значи када је линеал неког скупа цео простор $\mathbb{V}$?
18. Дефинисати суму два векторска потпростора. Када је ова сума директна?
19. (а) Написати Грасманову формулу.
(б) Одредити шта може бити димензија пресека два векторска потпростора димензија 3 и 5 у векторском простору димензије 6.
20. Дефинисати појам геометријског вектора у еуклидском простору $\mathbb{E}$, преко погодне дефинисане релације на скупу $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ уређених парова тачака еуклидског простора. Доказати да је та релација једна релација еквиваленције.
21. Дефинисати интензитет, правац и смер геометријског вектора.

22. Доказати да за сваку тачку $A \in \mathbb{E}$ и вектор $\vec{v}$ постоји јединствена тачка $B \in \mathbb{E}$ за коју важи $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.
23. (а) Дефинисати операције сабирања геометријских вектора, као и множења геометријског вектора реалним скаларом.
(б) Доказати да скуп $\vec{\mathbb{E}}$ свих геометријских вектора у односу на ове две операције има структуру реалног векторског простора.
24. Доказати да су векторски простори $\vec{\mathbb{E}}^1, \vec{\mathbb{E}}^2, \vec{\mathbb{E}}^3$ редом димензија 1, 2, 3 (ово су простори геометријских вектора еуклидских простора $\mathbb{E}^1, \mathbb{E}^2, \mathbb{E}^3$).
25. Дефинисати афини репер (координатни систем) простора $\mathbb{E}$. Како се додељују координате произвољној тачки простора $\mathbb{E}$? Шта су координатне осе?
26. Дефинисати скаларни производ на векторском простору $\vec{\mathbb{E}}$. Када је скаларни производ два вектора једнак нули?
27. Навести основне особине скаларног производа.
28. Дефинисати еуклидски векторски простор $(\mathbb{V}, \circ)$.
29. Доказати да за векторе u и v еуклидског векторског простора важи $u = v$ ако и само ако је $u \circ w = v \circ w$, за сваки вектор w .
30. Дефинисати ортогоналну базу и ортонормирану базу еуклидског векторског простора.
31. Како изгледа стандардни скаларни производ на векторском простору $\mathbb{R}^n$? Да ли је канонска (стандардна) база простора $\mathbb{R}^n$ ортонормирана?
32. Дефинисати Грамову матрицу (таблицу) и објаснити како се помоћу ње рачуна скаларни производ произвољна два вектора. Да ли то значи да се сваки векторски простор може снабдети структуром еуклидског векторског простора?
33. Дефинисати дужину (норму) вектора у еуклидском векторском простору.
34. Доказати да за произвољне векторе u, v из еуклидског векторског простора важи $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.
35. Како гласи неједнакост Коши-Шварц-Буњаковског? Како се помоћу ње дефинише угао између два вектора еуклидског векторског простора? Како изгледа формула за тај угао ако су вектори записани у ортонормираној бази?
36. Доказати да вектор $\frac{1}{\|u\|}u + \frac{1}{\|v\|}v$ полови угао између не-нула вектора u и v у произвољном еуклидском векторском простору.
37. Формулисати и доказати неједнакост троугла у еуклидском векторском простору.
38. Доказати да су координате произвољног вектора у ортонормираној бази еуклидског векторског простора скаларни производи тог вектора са базним векторима.
39. Доказати да су координате јединичног вектора у ортонормираној бази еуклидског векторског простора једнаке косинусима углова које тај вектор заклапа са базним векторима. Доказати да је збир квадрата ових косинуса једнак 1.
40. Доказати да је скуп који се састоји од међусобно ортогоналних вектора један линеарно независан скуп.
41. Доказати да за међусобно ортогоналне векторе $v_1, v_2, \dots, v_n$ важи $\|v_1 + v_2 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + \dots + \|v_n\|^2$.
42. (а) Одредити ортогоналну пројекцију вектора u на вектор v , тј. на векторски потпростор $\mathcal{L}(v)$. Која је дужина те пројекције?
(б) Одредити ортогоналну пројекцију вектора u на векторски потпростор $\mathcal{L}(v, w)$. Која је дужина те пројекције?
43. Описати Грам-Шмитов поступак (алгоритам) ортогонализације у тродимензионом еуклидском векторском простору. Која је геометријска интерпретација овог алгоритма?

44. Доказати да је следећом формулом дефинисан један скаларни производ $\circ$ на векторском простору $\mathbb{R}^3$:

(а) $x \circ y = 4x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$;

(б) $x \circ y = 2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) + (x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Одредити дужину вектора стандардне канонске базе овог простора, као и углове између њих (у односу на дефинисани скаларни производ $\circ$). Полазећи од те базе, одредити неку ортонормирану базу овог простора.

45. Дефинисати векторски (спољашњи) производ два вектора из $\vec{\mathbb{E}}^3$.

46. Дефинисати мешовити производ три вектора из $\vec{\mathbb{E}}^3$.

47. (а) Навести основне особине векторског и мешовитог производа.

(б) Доказати да су три вектора простора $\vec{\mathbb{E}}^3$ линеарно зависни (компланарни) ако и само ако је њихов мешовити производ једнак нули.

48. Доказати да је запремина паралелепипеда разапетог трима линеарно независним векторима једнака апсолутној вредности њиховог мешовитог производа. Када је та запремина једнака мешовитом производу, а када је супротног знака?

49. Извести формулу за векторски производ вектора који су записани у позитивно оријентисаној ортонормираној бази. Шта се мења у формули када је ортонормирана база негативно оријентисана?

50. Извести формулу за мешовити производ вектора који су записани у позитивно оријентисаној ортонормираној бази. Шта се мења у формули када је ортонормирана база негативно оријентисана?

51. Дефинисати Декартов правоугли координатни систем.

52. Навести векторску и параметарску једначину праве у простору $\mathbb{E}^2$. Одредити једначину праве одређену двома тачкама.

53. Навести експлицитну и имплицитну (општу) једначину праве у простору $\mathbb{E}^2$. Да ли све праве у равни имају експлицитни облик?

54. Одредити међусобни положај две праве у простору $\mathbb{E}^2$, дате својим једначинама.

55. Објаснити како се дефинише и рачуна угао између две праве у простору $\mathbb{E}^2$.

56. Дефинисати растојање између два скупа тачака у простору $\mathbb{E}^2$. Навести и доказати формулу за рачунање растојања тачке од праве.

57. Навести векторску и параметарску једначину равни у простору $\mathbb{E}^3$.

58. Одредити једначину равни одређену трима тачкама у простору $\mathbb{E}^3$.

59. Одредити међусобни положај две равни у простору $\mathbb{E}^3$, дате својим једначинама.

60. Навести векторску и параметарску једначину праве у простору $\mathbb{E}^3$.

61. Одредити међусобни положај две праве у простору $\mathbb{E}^3$, дате својим једначинама.

62. Објаснити како се рачуна угао између: (а) две праве; (б) праве и равни; (в) две равни у простору $\mathbb{E}^3$.

63. Навести и доказати формулу за рачунање растојања тачке од равни у простору $\mathbb{E}^3$.

64. Навести и доказати формулу за рачунање растојања тачке од праве у простору $\mathbb{E}^3$.

65. Доказати да две мимоилазне праве у простору $\mathbb{E}^3$ имају јединствену заједничку нормалу. У каквој је вези вектор правца те нормале са векторима правца датих правих?

66. Навести и доказати формулу за рачунање растојања две мимоилазне праве у простору $\mathbb{E}^3$.

67. Дефинисати поларни координатни систем и поларне координате тачака еуклидске равни $\mathbb{E}^2$. Да ли су поларне координате сваке тачке еуклидске равни једнозначно одређене?

68. Одредити везу између Декартових и поларних координата, уколико је поларна оса постављена на стандардни начин (пол се поклапа са координатним почетком, а поларна оса је позитивни део x -осе).

- 69.** Одредити једначину круга са центом (a, b) и полупречника r : (а) у Декартовим координатама; (б) у стандардним поларним координатама; (в) у поларним координатама где је пол центар круга, а поларна оса паралелна x -оси.
- 70.** Скицирати у Декартовом координатном систему следеће скупове тачака дате у стандардним поларним координатама: (а) $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; (б) $2 \leq \rho \leq 5$; (в) $\rho = 3, \pi \leq \theta \leq 2\pi$; (г) $\theta = \frac{3\pi}{4}, \rho \geq 2$.
- 71.** Представити у стандардним поларним координатама следећа пресликавања еуклидске равни: ротацију око координатног почетка, централну симетрију у односу на координатни почетак, рефлeksiју у односу на праву која садржи координатни почетак, хомотетију.
- 72.** Дефинисати конике у еуклидској равни $\mathbb{E}^2$. Извести једначину ових кривих у погодном одабраном поларном координатном систему.
- 73.** Извести канонске једначине елипсе, хиперболе и параболе.
- 74.** Формулисати и доказати фокално својство елипсе и хиперболе.
- 75.** Извести формуле за координате жижа и директриса елипсе и хиперболе, као и за жижу и директрису параболе.
- 76.** Формулисати оптичко својство елипсе, хиперболе и параболе.
- 77.** Написати неке параметризације елипсе (круга), хиперболе и параболе у канонском облику.
- 78.** Објаснити како се добијају конике као конусни пресеци.
- 79.** Дефинисати криве другог реда и навести који све скупови тачака могу бити криве другог реда.
- 80.** Скицирати у Декартовом координатном систему следеће криве другог реда:
 (а) $4(x+1)^2 + (y-2)^2 + 1 = 0$; (б) $4(x+1)^2 + (y-2)^2 - 1 = 0$; (в) $4(x+1)^2 + (y-2)^2 = 0$;
 (г) $4(x+1)^2 - (y-2)^2 - 1 = 0$; (д) $4(x+1)^2 - (y-2)^2 = 0$; (ђ) $4(x+1)^2 - (y-2)^2 = 0$;
 (е) $(2x+3y-5)^2 = 0$; (ж) $(2x+3y-5)^2 - 1 = 0$.

Основне особине пресликавања

1. Дефиниција пресликавања као уређене тројке (домен, кодомен, правило/закон придруживања) (примери).
2. Инјективна, сурјективна, бијективна пресликавања (дефиниција, примери).
3. Број инјективних, сурјективних, бијективних пресликавања на коначним скуповима.
4. Директна и инверзна слика скупа (дефиниција, примери).
5. Композиција пресликавања (дефиниција, доказ асоцијативности).
6. Нека својства композиције пресликавања (слагање са особинама инјективности и сурјективности).
7. Инверзно пресликавање (дефиниција, примери).
8. Пресликавања и основне скуповне операције.
9. Функције једне реалне променљиве, елементарне функције.
10. Графици елементарних функција (степенa, експоненцијална, логаритамска, тригонометријске, инверзне тригонометријске).

Непрекидност функција

1. Лимес функције у $\mathbb{R}$ (дефиниција, примери).
2. Дефиниција лимеса функције преко низова.
3. Леви и десни лимес функције (дефиниција, примери)..
4. Лимес функције у $\overline{\mathbb{R}}$ (дефиниција, примери).
5. Теорема о јединствености лимеса функције (формулација и доказ).
6. Алгебарска својства лимеса функције (формулација).
7. Теорема о два полицајца (формулација).
8. Теорема о лimesу композиције функција (формулација).
9. Непрекидност функције у тачки и на скупу (дефиниција).
10. Доказ непрекидности неких елементарних функција.
11. Тачке прекида (дефиниција, примери).
12. Локална својства непрекидних функција (формулација).
13. Болцано-Кошијева теорема о међувредности (формулација, последица, примери).
14. Вајерштрасова теорема о екстремним вредностима (формулација, последица).
15. Веза непрекидности и монотоности (формулација).

Диференцијални рачун

1. Извод функције (дефиниција, примери).
2. Диференцијал функције (дефиниција).
3. Веза непрекидности и диференцијабилности функције (формулација, доказ).
4. Геометријска интерпретација извода.
5. Тангента и нормала графика функције.
6. Леви и десни извод (дефиниција, примери).
7. Алгебарска својства диференцирања (формулација, доказ, примери).
8. Извод композиције функција (формулација, примери).
9. Извод инверзне функције (формулација, примери).
10. Извод имплицитно задате функције (формулација, примери).
11. Извод параметарски задате функције (формулација, примери).
12. Извод елементарних функција (таблица извода).
13. Логаритамски извод (формулација, примери).
14. Изводи вишег реда (дефиниција, примери).
15. Фермаова теорема (формулација, доказ, геометријска интерпретација).
16. Ролова теорема (формулација, доказ, геометријска интерпретација).
17. Лагранжова теорема (формулација, доказ, геометријска интерпретација).
18. Кошијева теорема (формулација).
19. Неке последице основних теорема диференцијалног рачуна.
20. Тејлоров и Маклоренов полином (дефиниција, примери).
21. Тејлорова формула (формулација, различити облици остатка).
22. Лопиталова правила (формулација, примери).
23. Веза монотоности и извода (формулација, примери).
24. Екстремне вредности функције (дефиниција, примери).
25. Критичне тачке и потребан услов за постојање екстремума функције (дефиниција, формулација, примери).
26. Довољни услови за постојање екстремума функције (формулација, примери).
27. Конвексност функција (дефиниција, геометријска интерпретација).
28. Превојне тачке и потребан услов за њихово постојање (дефиниција, формулација).
29. Довољни услови за постојање превојних тачака функције (формулација, примери).
30. Асимптоте функције (дефиниција, примери).
31. Испитивање тока функције (формулација свих корака).

Интегрални рачун

1. Примитивна функција и неодређени интеграл (дефиниција, формулација, доказ).
2. Основна својства неодређеног интеграла (формулација, доказ).
3. Таблица елементарних интеграла.
4. Теорема о смени променљиве у неодређеном интегралу (формулација, доказ, примери).
5. Теорема о парцијалној интеграцији у неодређеном интегралу (формулација, доказ, примери).
6. Интеграција рационалних функција (формулација, примери).
7. Интеграција неких ирационалних функција (формулација без Ојлерових замена, примери).
8. Интеграција неких тригонометријских функција (формулација, примери).
9. Одређени интеграл (дефиниција).
10. Веза одређеног интеграла и непрекидности (формулација).
11. Интеграција неких једноставнијих елементарних функција по дефиницији.
12. Својства одређеног интеграла (формулација).
13. Одређени интеграл и примитивна функција непрекидне функције (формулација).
14. Њутн-Лајбницева формула (формулација, доказ, примери).
15. Замена променљиве у одређеном интегралу (формулација, доказ, примери).
16. Интеграл парне, непарне, периодичне функције (формулација, доказ).
17. Парцијална интеграција одређеног интеграла (формулација, доказ).
18. Несвојствени интеграл (прва дефиниција, примери).
19. Примена одређеног интеграла на рачунање површине раванских фигура (формулација, примери).
20. Примена одређеног интеграла на рачунање дужине лука криве (формулација, примери).
21. Примена одређеног интеграла на рачунање запремине ротационих тела (формулација, примери).