

ГЕОМЕТРИЈА 3, школска 2021/22

задачи за вежбање - криве

Криве

1. Скицирати следеће:

- (а) трагове раванских кривих датих својом параметризацијом:

$$(\operatorname{ctg} t, \operatorname{tg} t), \quad t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right); \quad \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right), \quad t \in \mathbb{R}; \quad (2e^t, e^{2t}), \quad t \in \mathbb{R};$$

- (б) трагове просторних кривих датих својом параметризацијом:

$$(\ln t, 2 \ln t, 2 \ln t), \quad t \in \mathbb{R}^+; \quad (\ln t, \ln 2t, \ln 2t), \quad t \in \mathbb{R}^+; \quad (\ln t, \ln^2 t, \ln^2 t), \quad t \in \mathbb{R}^+;$$

- (в) скупове тачака у равни датих једначином у Декартовим координатама и одредити неке параметризоване криве чији су трагови ови скупови:

$$x^3 = y^4, \quad x^3 = y^5, \quad x^3 = y^6.$$

2. Доказати да је крива чија је поларна параметризација:

- (а) $\rho = \cos \theta$ кружница; (б) $\rho = \frac{1}{\cos \theta}$ права; (в) $\rho = \frac{1}{1 + \cos \theta}$ парабола; (г) $\rho^2 = \frac{1}{\cos 2\theta}$ хипербола;

- (д) $\rho = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ кардиоида.

3. Дата је крива поларном једначином

$$\rho = \sin^3 \frac{\theta}{3}.$$

- (а) Испитати регуларност и израчунати дужину дате криве, уколико је њен траг затворена крива.
(б) Одредити Френеов репер и кривину дате криве.
(в) Одредити углове које тангента и нормала дате криве заклапају са координатним осама.
(г) Одредити једначине два оскулаторна круга криве у тачки самопресека $(0, \frac{1}{8})$.

4. Дата је крива која се зове нефроида, својом параметризацијом

$$\alpha(t) = (3 \cos t - \cos 3t, 3 \sin t - \sin 3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (а) Доказати да је дата крива епициклоида која се добија као траг фиксиране тачке круга полупречника 1 који се котрља изнутра по кругу полупречника 2 који је фиксиран и има центар у координатном почетку (t је угао између позитивног дела x -осе и вектора положаја центра мањег круга). Испитати регуларност дате криве и скицирати је.
(б) Доказати да крива задовољава следеће једначине у поларним и Декартовим координатама:

$$\left(\frac{\rho}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad (x^2 + y^2 - 4)^3 = 108y^2.$$

- (в) Доказати да је траг криве α затворена крива и израчунати њену дужину.
(г) Одредити функцију дужине лука дате криве за $t \in (0, \pi)$, узимајући за почетну тачку прво $(0, 4)$, а затим $(2, 0)$. Доказати да за погодно одабрану функцију дужине лука s и кривину $\kappa(s)$ важи формула

$$4\rho^2 + s^2 = 12s,$$

где је $\rho(s)$ полупречник кривине дате криве.

- (д) Одредити еволуту дате криве, као и неку њену инволуту.

5. Дата је параметризована крива

$$\alpha(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^t, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t}, t\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (а) Одредити неки фиксирани јединични вектор v који заклапа константне углове са векторима Френеове базе дате криве у свакој тачки и одредити те углове.
(б) Доказати да траг дате криве припада хиперболичком цилиндру $xy = \frac{1}{2}$, као и цилиндрима $x + y = \sqrt{2} \operatorname{ch} z$ и $x - y = \sqrt{2} \operatorname{sh} z$. Одредити углове између дате криве и изводница ових цилиндара. Да ли је ова крива уопштени хеликс на неком од ових цилиндара?

- (в) Одредити криве на јединичној сфери које описују врхови векторских поља Френеове базе криве α , посматрани са почетком у координатном почетку.

6. Дата је параметризована крива

$$\alpha(t) = (2t - \sin(2t), -\cos(2t), 4 \sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (а) Доказати да тангентно векторско поље дате криве, транслирано у координатни почетак, описује Вивијанијеву криву на јединичној сфери, чији се траг добија у пресеку ове сфере и одговарајућег цилиндра полупречника $\frac{1}{2}$.
- (б) Одредити криву чији је траг скуп тачака на растојању од дате криве једнаком четворострукој кривини дате криве, у смеру нормалног векторског поља криве.
- (в) Доказати да је ортогонална пројекција дате криве на xOy раван циклоида, а на yOz раван део параболе.

7. (а) Нека је $\vec{p}$ вектор положаја произвољне тачке P на јединичној сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, а $\vec{v}$ неки јединични вектор нормалан на $\vec{p}$. Доказати да је крива

$$\alpha(t) = (\cos t) \vec{p} + (\sin t) \vec{v}, \quad t \in (0, 2\pi),$$

природно параметризован велики круг на сфери.

- (б) Доказати да је природно параметризована крива α на јединичној сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ неки велики круг ако и само ако важи $\alpha'' = -\alpha$.
- (в) Доказати да је сферна крива константне кривине део круга.

8. Нека је $\alpha(s)$, $s \in I$, $0 \in I$, крива параметризована дужином лука, при чему за торзију важи $\tau(s) > 0$ за све $s \in I$. Крива β задата је са

$$\beta(s) = \int_0^s B(u) du,$$

где је $B(s)$ вектор бинормале криве α . Доказати да је крива β такође параметризована дужином лука и изразити кривину, торзију, тангентно, нормално, бинормално и Дарбуово векторско поље криве β преко одговарајућих елемената криве α .

9. Нека је α регуларна крива. Слика криве β састоји од тачака које су на константном растојању d од одговарајућих тачака слике криве α дуж нормала криве α .

- (а) Испитати регуларност криве β . Ако је крива α затворена раванска крива, доказати да се може одабрати довољно мало d тако да је крива β регуларна.
- (б) Изразити кривину криве β преко кривине криве α и d .
- (в) Ако је крива α елипса, одредити све вредности константе d за које је крива β такође елипса.
- (г) Ако је крива α кружни хеликс, одредити све вредности константе d за које је крива β такође кружни хеликс.

10. Нека је $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ регуларна крива параметризована дужином лука s , кривине $\kappa \neq 0$ и $0 \in I$.

- (а) Доказати да за све тачке s у довољно малој околини тачке $0 \in I$ важи

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \left(s - \frac{\kappa_0^2}{6}s^3 + o(s^3)\right) T(0) + \left(\frac{\kappa_0}{2}s^2 + \frac{\kappa'_0}{6}s^3 + o(s^3)\right) N(0) + \left(\frac{\kappa_0\tau_0}{6}s^3 + o(s^3)\right) B(0),$$

где је $\kappa_0 = \kappa(0)$, $\kappa'_0 = \kappa'(0)$, $\tau_0 = \tau(0)$.

- (б) Дефинишимо криву $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ са

$$\beta(t) = \alpha(0) + tT_0 + \frac{t^2}{2}\kappa_0N_0 + \frac{t^3}{6}\kappa_0\tau_0B_0.$$

Доказати да су кривина, торзија и оскулаторна раван криве β у тачки $t = 0$ исте као кривина, торзија и оскулаторна раван криве α у тачки $s = 0$.

- (в) Доказати да је кривина просторне криве $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ у тачки $s_0 \in I$ једнака кривини раванске криве (у истој тачки) која се добија пројектовањем трага криве α на њену оскулаторну раван у тачки $\alpha(s_0)$.