

Универзитет у Београду, Биолошки факултет
БИОМАТЕМАТИКА, школска 2024/25 година
Теоријска питања и задаци за припрему колоквијума и испита

Заснивање скупова природних, целих, рационалних и реалних бројева

1. (а) Формулисати Аксиому (принцип) математичке индукције, као једну од Пеанових аксиома.

(б) Нека је $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \right\}$. Доказати да је $A = \mathbb{N}$.

(в) Нека је $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n \geq n^2\}$. Одредити скуп A .

2. Применом принципа математичке индукције, "доказаћемо" следеће тврђење: У произвољном скупу од n коња, сви коњи су исте боје.

Уколико је $n = 1$, тврђење је тачно (један коњ је само једне боје). Претпоставимо да је тврђење тачно за произвољан скуп од n коња и докажимо да одатле следи да је тачно и за произвољан скуп од $n + 1$ коња. Нека је $\{H_1, H_2, \dots, H_{n+1}\}$ произвољан скуп од $n + 1$ коња. У скупу $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ има n коња, па на основу индуктивне претпоставке сви они су исте боје (назовимо је боја A). Слично тако, у скупу $\{H_2, \dots, H_n, H_{n+1}\}$ има n коња, па на основу индуктивне претпоставке сви они су исте боје (назовимо је боја B). Како ова два скупа имају бар једног заједничког коња (нпр. коњ H_2), боје A и B морају бити исте, па су свих $n + 1$ коња исте боје.

Открити грешку у претходном расуђивању, с обзиром да тврђење које смо "доказали" очигледно није тачно.

3. Формулисати преостале Пеанове аксиоме.

4. Објаснити шта значи да је $(\mathbb{N}, +)$ полугрупа, а $(\mathbb{N}_0, +)$ моноид (полугрупа са неутралом). Зашто ове структуре нису групе?

5. Формулисати особине скупа $\mathbb{N}$ које се односе на међусобно слагање бинарних операција $+$ и $\cdot$, као и њихово слагање са бинарном релацијом $\leq$.

6. Објаснити шта значи да је $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ прстен. Зашто ова структура није поље?

7. Користећи релацију $\leq$, дефинишу се релације $\geq, <, >$ на скупу $\mathbb{Z}$ на следећи начин:

$x \geq y$ ако и само ако је $y \leq x$; $x < y$ ако и само ако је $x \leq y$ и $x \neq y$; $x > y$ ако и само ако је $y \leq x$ и $x \neq y$.

Да ли су то релације поретка?

8. Доказати да у скупу целих бројева важи:

(а) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$ (закон скраћивања за сабирање);

(б) $x + y = x \Rightarrow y = 0$ (јединственост неутрала за сабирање);

(в) $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$ (јединственост супротног елемента за сабирање);

(г) $-(x + y) = (-x) + (-y)$.

9. (а) Дефинисати операцију одузимања у скупу целих бројева.

(б) Доказати да једначина $a + x = b$ има јединствено решење у скупу целих бројева ($a, b \in \mathbb{Z}$).

10. Објаснити шта значи да је $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ линеарно уређено поље.

11. Доказати да у скупу рационалних бројева важи:

(а) $x \cdot y = x \cdot z$ и $z \neq 0 \Rightarrow y = z$ (закон скраћивања за множење);

(б) $x \cdot y = x$ и $x \neq 0 \Rightarrow y = 1$ (јединственост неутрала за множење);

(в) $x \cdot y = 1 \Rightarrow x \neq 0$ и $y = x^{-1}$ (јединственост инверзног елемента за множење);

(г) $x \cdot 0 = 0$, $x \cdot (-1) = -x$;

(д) $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ или $y = 0$;

(ђ) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$;

(е) $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.

12. (а) Дефинисати операцију дељења у скупу рационалних бројева.
 (б) Доказати да једначина $a \cdot x = b$ има јединствено решење у скупу рационалних бројева ($a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{Q}$).
13. Доказати да у скупу рационалних бројева важи:
 (а) $x + z \leq y + z \Rightarrow x \leq y$;
 (б) $x \cdot z \leq y \cdot z$ и $z > 0 \Rightarrow x \leq y$.
14. Формулисати Архимедово својство у пољу $\mathbb{R}$. Да ли оно важи и у пољу $\mathbb{Q}$?
15. Које аксиоме поља $\mathbb{R}$ важе и у пољу $\mathbb{Q}$?
16. (а) Формулисати аксиому супремума у скупу $\mathbb{R}$.
 (б) Навести пример одозго ограниченог подскупа скупа $\mathbb{Q}$, који нема супремум у $\mathbb{Q}$, а његов супремум у $\mathbb{R}$ износи $\sqrt{5}$.
17. (а) Формулисати аксиому инфимума у скупу $\mathbb{R}$.
 (б) Навести пример одоздо ограниченог подскупа скупа $\mathbb{Q}$ који нема инфимум у $\mathbb{Q}$, а његов инфимум у $\mathbb{R}$ износи $\sqrt{5}$.
18. Одредити (ако постоје) инфимум, супремум, минимум, максимум скупа $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid 3 \leq x^2 < 4\}$, прво у пољу $\mathbb{Q}$, а затим у пољу $\mathbb{R}$.
19. (а) Навести ε -карактеризацију супремума и инфимума.
 (б) Доказати да је $\inf \left\{ \frac{3}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 0$, $\sup \left\{ \frac{n-3}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 1$. Шта је супремум првог скупа? А инфимум другог скупа?
20. Представити следеће рационалне бројеве, записане у облику децималном облику, у облику разломка:
 $1,2333\dots$, $-6,818181\dots$, $4,559999\dots$, $0,285714285714\dots$.
21. Доказати да су следећи рационални бројеви представљени у сведеном облику и да имају бесконачан децимални запис (за све $n \in \mathbb{N}$): (а) $\frac{n}{2n^2+1}$; (б) $\frac{n}{n^2+n+1}$.
22. (а) Доказати да су збир и разлика једног рационалног и једног ирационалног броја ирационални бројеви.
 (б) Доказати да су производ и количник рационалног броја различитог од нуле и произвољног ирационалног броја ирационални бројеви.
 (в) Да ли збир, разлика, производ, количник произвољна два ирационална броја мора бити ирационалан број?
23. Доказати да су следећи бројеви ирационални:
 $\sqrt{3}$, $2024 + \sqrt{3}$, $\frac{1}{2024 - \sqrt{3}}$, $\sqrt{3} + \sqrt{2024}$, $\frac{1}{\sqrt{2024} - \sqrt{3}}$.
24. (а) Уколико за рационалне бројеве a, b, c, d важи $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, доказати да је $a = c$ и $b = d$. Да ли тврђење важи и за реалне бројеве a, b, c, d ?
 (б) Доказати да скуп $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ има структуру уређеног поља у односу на стандардне бинарне операције $+$ и $\cdot$ и бинарну релацију $\leq$.
25. (а) Доказати да се између свака два рационална броја налази рационалан број.
 (б) Доказати да се између сваког рационалног и ирационалног броја налази ирационалан број.

Низови реалних бројева

1. Дефинисати низ елемената неког скупа. Навести неколико примера низова чији се општи члан не може изразити експлицитном формулом.

2. (а) Математичком индукцијом показати да чланови Фибоначијевог низа (тзв. Фибоначијеви бројеви), дати формулом

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right),$$

задовољавају рекурентну формулу $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 3$, $F_1 = F_2 = 1$.

(б) Математичком индукцијом показати да чланови Лукасовог низа (тзв. Лукасови бројеви), дати формулом

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

задовољавају рекурентну формулу $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $n \geq 3$, $L_1 = 1$, $L_2 = 3$.

3. Посматрајмо првих неколико чланова низа (a_n) : $a_1 = 1$, $a_2 = 16$, $a_3 = 81$, $a_4 = 256$. Одредити реалне бројеве A, B, C, D такве да полином $P(n) = An^3 + Bn^2 + Cn + D$ задовољава $a_1 = P(1)$, $a_2 = P(2)$, $a_3 = P(3)$, $a_4 = P(4)$. Да ли мора да важи $a_5 = P(5)$?

4. (а) Дефинисати ограничен низ (одозго, одоздо), као и монотон низ почевши од неког члана (растући, опадајући, строго растући, строго опадајући).

(б) Испитати монотоност и ограниченост низа чији је општи члан $a_n = \frac{n+1}{n}$.

5. Дефинисати граничну вредност низа (коначну, бесконачну), као и конвергентан и дивергентан низ.

6. Доказати да сваки низ који тежи ка $+\infty$ или $-\infty$ мора бити неограничен. Да ли је тачно обрнуто тврђење?

7. Доказати да произвољан низ може имати највише једну коначну граничну вредност (лимес).

8. (а) Уколико је (a_n) конвергентан низ, доказати да је и низ $(|a_n|)$ конвергентан. Прецизније, уколико је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, доказати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$.

У доказу можете користити познату неједнакост $||x| - |y|| \leq |x - y|$, која важи за све реалне бројеве x, y .

(б) Контрапримером показати да обрнуто тврђење не важи.

9. (а) Дефинисати нула-низ. Доказати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ ако и само ако је $(a_n - a)$ нула-низ.

(б) Доказати по дефиницији да је низ $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ нула-низ. Одредити најмање могуће $n_0 = n_0(\varepsilon)$ за $\varepsilon = \frac{1}{100}$, $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, $\varepsilon = \frac{1}{10000}$.

10. (а) Доказати да је производ нула-низа и произвољне реалне константе опет нула-низ.

(б) Доказати да за производ нула-низа и ограниченог низа опет нула-низ.

11. (а) Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, доказати да је $a_n \neq 0$ за скоро све чланове низа, као и да је $\left(\frac{1}{a_n} \right)$ нула-низ.

(б) Контрапримером показати да обрнуто тврђење не важи.

(в) Уколико је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, доказати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{a_n} \right| = +\infty$.

12. Доказати да је збир, разлика и производ два нула-низа опет нула-низ. Контрапримерима показати да количник два нула-низа може имати било коју (коначну или бесконачну) граничну вредност, као и да може бити дивергентан.

13. Доказати да су збир, разлика и производ два конвергентна низа (a_n) и (b_n) опет конвергентни низови. Шта су лимеси тих низова?

14. Објаснити грешку у "примени" претходног тврђења на рачунање лимеса

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0,$$

а затим одредити тачну вредност овог лимеса.

15. (а) Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$, доказати да је $b_n \neq 0$ за скоро све чланове низа, као и да је низ $\left(\frac{1}{|b_n|} \right)$ ограничен.

(б) Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$, доказати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

16. Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, доказати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = +\infty$.

17. (а) Ако је $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}^+$, доказати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

(б) Формулисати одговарајућа тврђења у случају када је $b \in \mathbb{R}^-$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$.

(в) Контрапримерима показати да за $b = 0$ производ низова $(a_n \cdot b_n)$ може имати било коју (коначну или бесконачну) граничну вредност, као и да може бити дивергентан.

18. Одредити (са доказом) граничну вредност у случајевима $k > l$, $k = l$, $k < l$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \cdots + b_1 n + b_0}.$$

19. Формулисати и доказати Теорему о полицајцима (у $\overline{\mathbb{R}}$).

20. Доказати да за произвољне ненегативне реалне бројеве $a_1, a_2, \dots, a_k$ важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}.$$

21. (а) Дефинисати подниз датог низа.

(б) Одредити поднизове $a_{6k}, a_{6k+1}, \dots, a_{6k+5}$ низа $a_n = (-1)^n \sin \frac{n\pi}{3}$.

22. Дефинисати тачку нагомилавања низа у $\overline{\mathbb{R}}$, на два еквивалентна начина. Објаснити шта је основна разлика између тачке нагомилавања и границне вредности низа.

23. Доказати да конвергентан низ $\overline{\mathbb{R}}$ има само једну тачку нагомилавања.

24. Одредити колико тачака нагомилавања у $\overline{\mathbb{R}}$ може имати произвољан низ реалних бројева.

25. Навести пример низа (уколико постоји) који има: (а) 0; (б) 2; (в) 5; (г) бесконачно много тачака нагомилавања у $\mathbb{R}$.

26. У зависности од $q \in \mathbb{R}$, испитати конвергенцију геометријског низа $a_n = q^n$.

27. Доказати да је сваки конвергентан низ ограничен. Да ли важи обрнуто тврђење?

28. Формулисати и доказати Теорему о конвергенцији монотоних и ограничених низова (посебно за растући и опадајући низ). Да ли је сваки монотон низ конвергентан у $\overline{\mathbb{R}}$?

29. Користећи (без доказа) тврђење да сваки низ има монотон подниз, доказати да сваки низ има конвергентан подниз у $\overline{\mathbb{R}}$, док сваки ограничен низ има конвергентан подниз у $\mathbb{R}$. Другим речима, сваки низ реалних бројева има бар једну тачку нагомилавања у $\overline{\mathbb{R}}$, а ограничен низ бар једну тачку нагомилавања у $\mathbb{R}$.

30. Дефинисати број e .

Редови реалних бројева

1. Дефинисати низ парцијалних (делимичних) сума неког низа реалних бројева.
2. Дефинисати конвергентан и дивергентан ред реалних бројева. Шта је сума конвергентног реда?
3. Доказати да геометријски ред $\sum_{n=0}^{\infty} bq^n$ конвергира ако и само ако је $|q| < 1$. Која је сума тог реда?
4. Доказати да следећи редови конвергирају и одредити њихове суме:
(а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; (б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$; (в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$.
5. Доказати да општи члан конвергентног реда тежи нули.
6. Доказати да хармонијски ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира, иако његов општи члан тежи нули.
7. Доказати да ред чији је општи члан позитиван конвергира ако и само ако је низ његових парцијалних сума ограничен одозго.
8. (а) Формулисати и доказати Први поредбени критеријум о конвергенцији редова са позитивним члановима.
(б) Доказати да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира уколико је $\alpha \geq 2$, а дивергира уколико је $\alpha \leq 1$. Шта се дешава за $\alpha \in (1, 2)$?
9. (а) Формулисати и доказати Други поредбени критеријум редова са позитивним члановима.
(б) Доказати да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5n^2+1}}$ дивергира, а ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{5n^6+1}}$ конвергира.
10. Навести пример редова $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са позитивним члановима, таквих да је:
(а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, при чему први ред конвергира, а други дивергира;
(б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, при чему први ред дивергира, а други конвергира.
11. Формулисати Даламберов и Кошијев критеријум конвергенције редова са позитивним члановима. Применити их на испитивање конвергенције реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{2024^n}$.
12. Дефинисати апсолутно и условно конвергентан ред реалних бројева и навести по један пример таквих редова. У каквом су односу ове две врсте конвергенције?
13. (а) Дефинисати Ојлерову константу.
(б) Доказати да је $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.
14. (а) Формулисати Лајбницов критеријум конвергенције алтернирајућих редова.
(б) Доказати да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ условно конвергентан.
15. (а) Формулисати Риманову теорему о мењању поретка сабирака код редова са члановима променљивог знака.
(б) Доказати да је $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \dots = \frac{\ln 2}{2}$, иако је $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \ln 2$.

Основне особине пресликавања

1. Дефиниција пресликавања као уређене тројке (домен, кодомен, правило/закон придруживања) (примери).
2. Инјективна, сурјективна, бијективна пресликавања (дефиниција, примери).
3. Број инјективних, сурјективних, бијективних пресликавања на коначним скуповима.
4. Директна и инверзна слика скупа (дефиниција, примери).
5. Композиција пресликавања (дефиниција, доказ асоцијативности).
6. Нека својства композиције пресликавања (слагање са особинама инјективности и сурјективности).
7. Инверзно пресликавање (дефиниција, примери).
8. Пресликавања и основне скуповне операције.
9. Функције једне реалне променљиве, елементарне функције.
10. Графици елементарних функција (степенa, експоненцијална, логаритамска, тригонометријске, инверзне тригонометријске).

Непрекидност функција

1. Лимес функције у $\mathbb{R}$ (дефиниција, примери).
2. Дефиниција лимеса функције преко низова.
3. Леви и десни лимес функције (дефиниција, примери)..
4. Лимес функције у $\overline{\mathbb{R}}$ (дефиниција, примери).
5. Теорема о јединствености лимеса функције (формулација и доказ).
6. Алгебарска својства лимеса функције (формулација).
7. Теорема о два полицајца (формулација).
8. Теорема о лимесу композиције функција (формулација).
9. Непрекидност функције у тачки и на скупу (дефиниција).
10. Доказ непрекидности неких елементарних функција.
11. Тачке прекида (дефиниција, примери).
12. Локална својства непрекидних функција (формулација).
13. Болцано-Кошијева теорема о међувредности (формулација, последица, примери).
14. Вајерштрасова теорема о екстремним вредностима (формулација, последица).
15. Веза непрекидности и монотоности (формулација).

Диференцијални рачун

1. Извод функције (дефиниција, примери).
2. Диференцијал функције (дефиниција).
3. Веза непрекидности и диференцијабилности функције (формулација, доказ).
4. Геометријска интерпретација извода.
5. Тангента и нормала графика функције.
6. Леви и десни извод (дефиниција, примери).
7. Алгебарска својства диференцирања (формулација, доказ, примери).
8. Извод композиције функција (формулација, примери).
9. Извод инверзне функције (формулација, примери).
10. Извод имплицитно задате функције (формулација, примери).
11. Извод параметарски задате функције (формулација, примери).
12. Извод елементарних функција (таблица извода).
13. Логаритамски извод (формулација, примери).
14. Изводи вишег реда (дефиниција, примери).
15. Фермаова теорема (формулација, доказ, геометријска интерпретација).
16. Ролова теорема (формулација, доказ, геометријска интерпретација).
17. Лагранжова теорема (формулација, доказ, геометријска интерпретација).
18. Кошијева теорема (формулација).
19. Неке последице основних теорема диференцијалног рачуна.
20. Тејлоров и Маклоренов полином (дефиниција, примери).
21. Тејлорова формула (формулација, различити облици остатка).
22. Лопиталова правила (формулација, примери).
23. Веза монотоности и извода (формулација, примери).
24. Екстремне вредности функције (дефиниција, примери).
25. Критичне тачке и потребан услов за постојање екстремума функције (дефиниција, формулација, примери).
26. Довољни услови за постојање екстремума функције (формулација, примери).
27. Конвексност функција (дефиниција, геометријска интерпретација).
28. Превојне тачке и потребан услов за њихово постојање (дефиниција, формулација).
29. Довољни услови за постојање превојних тачака функције (формулација, примери).
30. Асимптоте функције (дефиниција, примери).
31. Испитивање тока функције (формулација свих корака).

Интегрални рачун

1. Примитивна функција и неодређени интеграл (дефиниција, формулација, доказ).
2. Основна својства неодређеног интеграла (формулација, доказ).
3. Таблица елементарних интеграла.
4. Теорема о смени променљиве у неодређеном интегралу (формулација, доказ, примери).
5. Теорема о парцијалној интеграцији у неодређеном интегралу (формулација, доказ, примери).
6. Интеграција рационалних функција (формулација, примери).
7. Интеграција неких ирационалних функција (формулација без Ојлерових замена, примери).
8. Интеграција неких тригонометријских функција (формулација, примери).
9. Одређени интеграл (дефиниција).
10. Веза одређеног интеграла и непрекидности (формулација).
11. Интеграција неких једноставнијих елементарних функција по дефиницији.
12. Својства одређеног интеграла (формулација).
13. Одређени интеграл и примитивна функција непрекидне функције (формулација).
14. Њутн-Лајбницева формула (формулација, доказ, примери).
15. Замена променљиве у одређеном интегралу (формулација, доказ, примери).
16. Интеграл парне, непарне, периодичне функције (формулација, доказ).
17. Парцијална интеграција одређеног интеграла (формулација, доказ).
18. Несвојствени интеграл (прва дефиниција, примери).
19. Примена одређеног интеграла на рачунање површине раванских фигура (формулација, примери).
20. Примена одређеног интеграла на рачунање дужине лука криве (формулација, примери).
21. Примена одређеног интеграла на рачунање запремине ротационих тела (формулација, примери).