

Универзитет у Београду, Биолошки факултет
БИОМАТЕМАТИКА, школска 2024/25 година
Први колоквијум, теоријски део (пример 1)

1. (а) Формулисати Аксиому супремума скупа реалних бројева.
(б) Одредити (уколико постоје) супремум и инфимум у скупу $\mathbb{R}$ скупа $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 5)(x - 1) < 0\}$.
Да ли овај скуп има супремум и инфимум у скупу $\mathbb{Q}$?

2. (а) Доказати да је број $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ ирационалан.
(б) Да ли је збир два ирационална броја увек ирационалан број? Образложити.

3. (а) Доказати да је производ нула-низа и ограниченог низа нула-низ.
(б) Доказати по дефиницији да је $a_n = \frac{1}{3^n}$ нула-низ, а затим израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2024n)}{3^n}$.

4. (а) Дефинисати тачку нагомилавања низа. Објаснити шта је основна разлика између тачке нагомилавања и граничне вредности низа.
(б) Колико различитих тачака нагомилавања у скупу $\overline{\mathbb{R}}$ може имати низ реалних бројева? Навести пример низа чије су тачке нагомилавања $-3, \sqrt{5}, +\infty$.
(в) Одредити тачке нагомилавања низа $b_n = 5 \cos \frac{n\pi}{2}$.

5. (а) Формулисати Поредбени критеријум конвергенције редова са позитивним члановима.

(б) Доказати да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^3 + 5}}$ конвергентан.

6. Дати су скупови $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$.

(а) Навести пример бар једног пресликавања $f : A \rightarrow B$ које је НА (сурјекција). За то пресликавање одредити скуп $f^{-1}[\{a\}] = \{x \in A \mid f(x) = a\}$.

(б) Навести пример бар једног пресликавања $g : B \rightarrow A$ које је 1 – 1 (инјекција). За то пресликавање одредити скуп $g[B] = \{g(x) \mid x \in B\}$.

7. Дата је функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ својом формулом $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^5}, & x \leq -1 \\ \sin \frac{\pi x}{2}, & |x| < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4 \\ 2^x, & x > 4. \end{cases}$

(а) Скицирати график дате функције.

(б) Да ли је дата функција бијекција? Уколико јесте, одредити њену инверзну функцију f^{-1} .

Универзитет у Београду, Биолошки факултет
БИОМАТЕМАТИКА, школска 2024/25 година
Први колоквијум, теоријски део (пример 2)

1. (а) Формулисати Аксиому (принцип) математичке индукције у скупу $\mathbb{N}$.
(б) Доказати да је $\left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1} \right\} = \mathbb{N}$.
(в) Доказати да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ конвергентан и израчунати његову суму.

2. (а) Дефинисати операцију дељења у скупу рационалних бројева.
(б) Доказати да једначина $a \cdot x = b$ има јединствено решење x у скупу рационалних бројева, уколико је $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{Q}$. Колико решења има ова једначина уколико је $a = 0$?

3. (а) Формулисати Теорему о монотоним и ограниченим низовима у скупу реалних бројева. Како гласи одговарајуће тврђење у $\overline{\mathbb{R}}$?
(б) Испитати монотоност низа $a_n = \frac{3^n}{n!}$. Шта је лимес тог низа (доказати)?
(в) Одредити супремум и инфимум скупа $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

4. (а) Доказати да је производ два конвергентна низа опет конвергентан низ.
(б) Навести пример једног конвергентног и једног дивергентног низа чији је производ опет конвергентан низ.

5. (а) Доказати да општи члан конвергентног реда тежи нули.

(б) Доказати да хармонијски ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира, иако његов општи члан тежи нули.

6. (а) Дата су бијективна пресликавања $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$. Доказати да је њихова композиција $h = g \circ f$ једно бијективно пресликавање $h : A \rightarrow C$, чије је инверзно пресликавање $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(б) Навести пример неких пресликавања $f : \{a, b\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ и $g : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{c, d\}$ која нису бијекције, таквих да је њихова композиција $h = g \circ f : \{a, b\} \rightarrow \{c, d\}$ бијекција.

7. Дата је функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ својом формулом $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(а) Одредити скупове $f[(0, +\infty)]$, $f[(-1, 1)]$, $f^{-1}[(0, +\infty)]$, $f^{-1}[(\frac{1}{2}, 1)]$. Да ли је дата функција 1 – 1 или НА?

(б) Одредити неке бесконачне скупове A и B такве да је функција $g : A \rightarrow B$, дата истом формулом $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, бијекција и одредити инверзну функцију g^{-1} .

Универзитет у Београду, Биолошки факултет
БИОМАТЕМАТИКА, школска 2024/25 година
Први колоквијум, теоријски део (пример 3)

1. (а) Објаснити шта значи да је $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ линеарно уређен прстен. Зашто ова структура није поље?
(б) Објаснити шта значи да је $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ линеарно уређено поље.

2. (а) Формулисати Аксиому инфимума у скупу $\mathbb{R}$.
(б) Навести пример одоздо ограниченог подскупа скупа $\mathbb{Q}$, који нема инфимум у $\mathbb{Q}$, а његов инфимум у $\mathbb{R}$ износи $1 + \sqrt{3}$.

3. (а) Дефинисати граничну вредност низа (коначну, бесконачну), као и конвергентан и дивергентан низ.
(б) Доказати да конвергентан низ има тачно једну коначну граничну вредност.

4. (а) Доказати да је геометријски низ $b_n = bq^n$ ($n \in \mathbb{N}_0$, $b, q \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$) конвергентан ако и само ако је $-1 < q \leq 1$.
(б) Доказати да је геометријски ред $\sum_{n=1}^{\infty} bq^n$ конвергентан ако и само ако је $|q| < 1$. За такве вредности количника q , израчунати суму овог реда.

5. (а) Дефинисати апсолутну и условну конвергенцију редова.

(б) Формулисати Лајбницов критеријум конвергенције алтернирајућих редова.

(в) Доказати да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ условно конвергентан.

6. Дат је skup $A = \{x, y, u, v, w\}$ и пресликавање $f : A \rightarrow A$ са $f : \begin{pmatrix} x & y & u & v & w \\ u & v & y & w & x \end{pmatrix}$

(а) Одредити низ пресликавања (f_n) , $n \in \mathbb{N}$, дефинисаних са $f_n(x) = f(\underbrace{f(\dots f(x))}_n)$ (то су пресликавања

$f_1 = f$, $f_2 = f \circ f$, $f_3 = f \circ f \circ f$, $\dots$). Која су међу овим пресликавањима једнака?

(б) Одредити неко пресликавање $g : A \rightarrow A$ такво да $f \circ g \neq g \circ f$.

7. Дата је функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ својом формулом $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$.

(а) Доказати да је функција f бијекција ако се за домен и кодомен одаберу скупови $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Скицирати график ове функције.

(б) Одредити експлицитну формулу за функцију $g : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$, дату условом $g\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) = \frac{x+1}{x-1}$.
Колико је $g(-2)$?