

Геометрија кривих и површи, вежбе

Милан Павловић, milan.pavlovic@matf.bg.ac.rs

Математички факултет Универзитета у Београду

22/02/2025

Главни циљ ових материјала је презентација решења задатака предвиђених за вежбе на курсу Геометрија кривих и површи на другој години основних академских студија Математичког факултета у Београду. Списак задатака може се наћи на линку http://www.matf.bg.ac.rs/p/files/74-vezbe_2020.pdf. Исписана решења колеге Димитрија Шпадијера можете наћи на његовој страници [2]. За добре ствари овог материјала заслуге имају и колеге које су претходних година држале овај курс, Милош Ђорић, Милош Антић, Маријана Бабић и Димитрије Шпадијер. За релевантне дефиниције и тврђења који нису уведени у овом материјалу као и за ширу слику погледати предавања (тј. главну литературу [1] за иста). Овај материјал је у фази израде и биће допуњаван током семестра (између осталог надам се да ћу графике заменити бољим). Треба имати у виду да начин излагања, иако настоји да буде у духу математичке строгости, може бити неформалан на местима и као такав одговара белешкама. На грешке ми можете указати електронском поштом.

1 Криве

Под *диференцијабилном параметризованом кривом* у еуклидском простору $\mathbb{R}^n$ подразумевамо диференцијабилно пресликавање $\gamma : (a, b) = \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)).$$

Параметризована крива је класе k уколико је пресликавање γ класе $\mathcal{C}^k$, а *регуларна* је у тачки $t_0 \in \mathbb{I}$ ако је $\frac{d\gamma}{dt}(t_0) \neq \vec{0}$. Параметризована крива је регуларна ако је регуларна у свим тачкама домена. Приметимо да је геометријски смисао регуларности, да крива има тангенту.

На неким курсевима крива је скуп тачака, за нас је крива пресликавање док њену слику $\gamma(\mathbb{I})$ можемо видети као скуп тачка у кодомену и називамо је трагом криве.

Задатак 1. Параметризовати елипсу, хиперболу и параболу дате:

- а) у канонском облику у Декартовом координатном систему;
- б) у поларном координатном систему чији је центар нека жижа криве другог реда, а оса се поклапа са осом криве која садржи тачку.

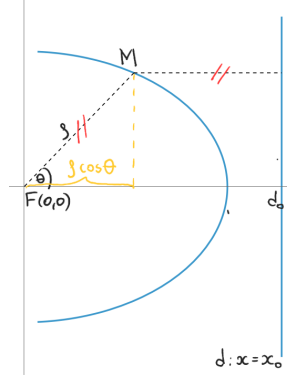
Решење. а) Позната је једначина елипсе у Декартовим координатама

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0,$$

као и тригонометријски идентитет

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Видимо да је $\gamma : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ једна параметризација елипсе. Крива је (на овом курсу) пресликавање, те наводимо домен, кодомен и правило по ком пресликавамо. Приметимо да је



Слика 1

траг криве γ елипса без једне тачке (у овој параметризацији, без тачке $(a, 0)$). За домен смо могли узети и било који други отворени интервал дужине 2π . Интервал мора бити отворен због дефиниције криве па траг параметризације покрива елипсу (као геометријско место тачака у равни) без једне тачке, али то нам није проблем јер многа геометријска својства кривих која планирамо да изучавамо не зависе од једне тачке, нпр. дужина.

Слично, користећи хиперболички идентитет $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, за хиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0$, имамо нпр. параметризацију $\gamma_2 : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_2(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$. За параметризацију параболе $y^2 = 2px, p \neq 0$ можемо узети нпр. $\gamma_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_3(t) = (\frac{t^2}{2p}, t)$.

б) Нека је $F(0,0)$ жижа криве другог реда Γ и нека је $d : x = d_0, d_0 > 0$ једначина директрисе (погледати Слика 1). Свака тачка $M \in \Gamma$ задовољава

$$\frac{d(M, F)}{d(M, d)} = e, \quad (1)$$

где је $e > 0$ ексцентрицитет криве и $d(\cdot, \cdot)$ функција растојања. Нека су ρ и θ поларне координате тачке M , тј. $M(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Како је $d(M, F) = \rho$ (јер је F координатни почетак) и $d(M, d) = d_0 - \rho \cos \theta$ (погледати слику) из (1) имамо:

$$\begin{aligned} \rho &= d_0 e - \rho e \cos \theta \\ \rho(1 + e \cos \theta) &= d_0 e \\ \rho &= \frac{d_0 e}{1 + e \cos \theta} \\ \rho &= \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \end{aligned} \quad (2)$$

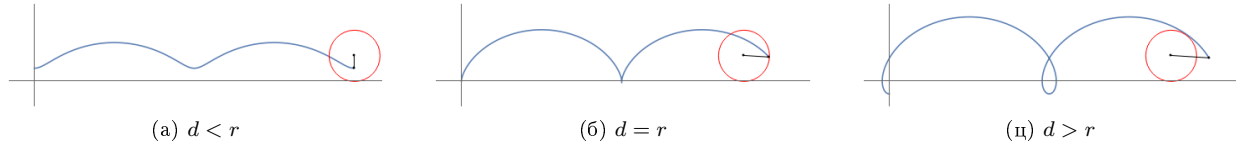
где је $p = d_0 e > 0$. Израз (2) даје растојање као функцију угла те је параметризација криве другог реда у поларним координатама $\gamma(\theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = (\frac{p \cos \theta}{1 + e \cos \theta}, \frac{p \sin \theta}{1 + e \cos \theta})$. Треба још одредити домен.

Како је $\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \geq 0$ и $p \geq 0$, мора бити и $1 + e \cos \theta > 0$, тј.

$$\cos \theta > -\frac{1}{e}. \quad (3)$$

Имамо три случаја:

- 1) $0 < e < 1$. У овом случају је $-\frac{1}{e} < -1 \leq \cos \theta$ па је (3) задовољено за свако $\theta \in \mathbb{R}$. Како су функције $\sin \theta$ и $\cos \theta$ 2π -периодичне, можемо узети за домен било који интервал дужине 2π , нпр. $\gamma : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(\theta) = (\frac{p \cos \theta}{1 + e \cos \theta}, \frac{p \sin \theta}{1 + e \cos \theta})$. Добијамо параметризацију елипсе (без једне тачке).
- 2) $e = 1$. Овде мора бити $\cos \theta \neq -1$, тј. $\theta \notin \{\pi + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ па је једна параметризација $\gamma : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(\theta) = (\frac{p \cos \theta}{1 + \cos \theta}, \frac{p \sin \theta}{1 + \cos \theta})$. Траг ове криве је параболоа.



Слика 2



Слика 3

- 3) $e > 1$. Решење неједначине $\cos \theta > -\frac{1}{e}$, где $\frac{1}{e} \in (0, 1)$ је унија $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\arccos(\frac{1}{e}) + 2k\pi, \arccos(\frac{1}{e}) + 2k\pi)$. За домен можемо узети било који од ових интервала чиме добијамо параметризацију (гране) хиперболе, нпр. $\gamma : (-\arccos(\frac{1}{e}), \arccos(\frac{1}{e})) \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(\theta) = (\frac{p \cos \theta}{1+e \cos \theta}, \frac{p \sin \theta}{1+e \cos \theta})$.

Примедба 1. Веза Декартових и поларних координата. Постоји више начина да опишемо тачку у равни. Претпостављамо да је свима познато описивање помоћу Декартових координата, рецимо тачке $A(x, y)$. Други начин да опишемо где се тачка A налази у равни је да кажемо њено растојање ρ од координатног почетка и угао θ који $\overrightarrow{OA}$ заклапа са позитивним делом x -осе. Координате (ρ, θ) називамо *поларне*. Уколико су нам познате поларне координате (ρ, θ) тачке A , Декартове координате добијамо лако $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$. Уколико су нам пак познате Декартове координате, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ је такође једноставно одредити, док је угао θ нешто теже. Наиме, важи $\tan \theta = \frac{y}{x}$, али θ не можемо једноставно видети као $\arctan \frac{y}{x}$ јер $\arctan$ увек враћа угао између $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ па морамо бити пажљиви у ком квадранту је наша тачка и сходно томе користи инверзну тригонометријску функцију. Приметио да у поларним координатама координатни почетак није записан једнозначно ($\rho = 0, \theta$ може бити било шта).

Задатак 2. а) Одредити неку параметризовану криву чији траг представља скуп свих тачака у равни које се добијају као траг фиксирани тачке на растојању d од центра диска полупречника r који се котрља без клизања по равној подлози. Скицирати.

- б) Испитати регуларност те криве у зависности од тога да ли је $d < r, d > r$ или $d = r$. (погледати Слика 2)

Решење. а) Диск у тренутку $t = 0$ има центар у тачки $C_0(0, r)$. Котрљање без клизања по равној подлози је композиција равномерног праволинијског кретања у смеру x -осе константном брзином v и ротационог кретања око центра диска константном угаоном брзином w . Како се диск креће без клизања, то се у додирној тачки диска и подлоге брзине поништавају, тј. $v = wr$. (погледати Слика 3 лево)

Приметио да ротација и транслација комутирају и да се након времена t центар диска налази у тачки $C_1(vt, r)$. Погледајмо какав ефекат има котрљање на тачку $M_0(0, r-d)$ са y -осе. Након времена t , да нема ротације, та тачка би била померена у тачку $M_1(vt, r-d)$. Да бисмо добили укупан резултат котрљања, тачку $M(x_M, y_M)$, потребно је још тачку M_1 заротирати око тачке C_1 за угао $-\phi$, где је $\phi = \omega t$ (минус јер се ротација дешава у математички негативном смеру). (погледати Слика 3 десно, где је скицирано за $d = r$). Дакле, $M = \mathcal{R}_{C_1, \phi}(M_1)$, тј. формулама:

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{MC_1}] &= [\mathcal{R}_{C_1, \phi}] \cdot [\overrightarrow{M_1C_1}] \\
\begin{pmatrix} x_M - vt \\ y_M - r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} vt - vt \\ (r - d) - r \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} vt - d \sin \phi \\ r - d \cos \phi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Искористимо $vt = wrt = r\phi$ и добијамо координате тачке $M(r\phi - d \sin \phi, r - d \cos \phi) = M(\phi)$. Коначно, параметризација је $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(\phi) = (r\phi - d \sin \phi, r - d \cos \phi)$. Траг ове криве је трохоида (или уопштена циклоида), док за $d = r$ добијамо криву коју зовемо циклоида.

б) Како бисмо испитали регуларност, израчунајмо $\gamma'(\phi)$,

$$\begin{aligned}
\gamma'(\phi) &= (r - d \cos \phi, d \sin \phi) \\
\gamma'(\phi) = \vec{0} &\iff \sin \phi = 0 \wedge r - d \cos \phi = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Како је $\sin \phi = 0$ само за $\phi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, то је други израз у (4) еквивалентан са $r - d(-1)^k = 0$, а то је тачно само за $d = r$ и k парно. Дакле, за $r \neq d$ крива је регуларна на целом $\mathbb{R}$ док је за $d = r$ она регуларна на отвореним интервалима $(2k\pi, 2(k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$. Упоредити овај резултат са Слика ??) - обратити пажњу на "шпице".

Задатак 3. Дата је астероида својом једначином у Декартовим координатама $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$.

- Одредити неку параметризацију дате криве и доказати да њен траг представља трајекторију фиксиране тачке кружнице полупречнија $\frac{a}{4}$ који се котрља без клизања изнутра по непокретном кругу полупречника a (погледати Слика 4). Скицирати.
- Доказати да је дужина одсечка тангентне линије астероиде одређеног координатним осама константна.
- Одредити неку параметризовану криву на сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ чија је ортогонална пројекција на xOy -раван дата крива.

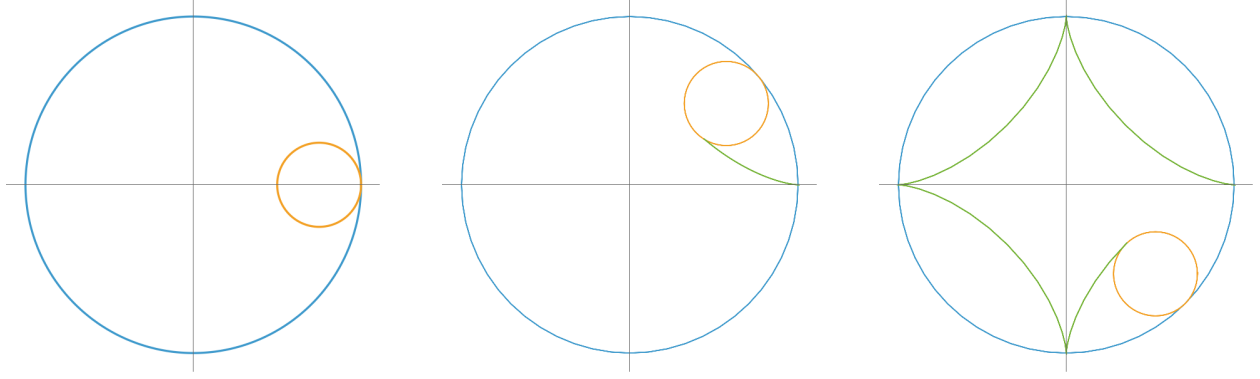
Решење. а) Користећи основни тригонометријски идентите $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, видимо да је $\gamma(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ једна могућа параметризација астероиде. Остаје још да одредимо период. Важи

$$\begin{aligned}
\cos 3t &= \cos(2t + t) = \cos(2t) \cos t - \sin(2t) \sin t \\
&= \cos^3 t - \sin^2 t \cos t - 2 \sin t \cos t \sin t \\
&= \cos^3 t - 3 \sin^2 t \cos t \\
&= \cos^3 t - 3(1 - \cos^2 t) \cos t \\
&= 4 \cos^3 t - 3 \cos t.
\end{aligned} \tag{5}$$

Одакле добијамо $\cos^3 t = \frac{1}{4}(\cos(3t) + 3 \cos t)$ и слично (покажете) $\sin^3 t = \frac{1}{4}(3 \sin t - \sin 3t)$. Период функције $\cos^3 t$ је најмањи заједнички садржалац периода функција $\cos(3t)$ и $\cos t$, тј. $NZS(\frac{2\pi}{3}, 2\pi) = 2\pi$ и слично за $\sin^3 t$, па је и период параметризације γ такође 2π и коначно $\gamma : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Нека унутрашњи диск у тренутку $t = 0$ има центар у тачки $C_0(0, \frac{3a}{4})$ и нека је $M_0(a, 0)$ додирна тачка два диска у тренутку $t = 0$. Котрљање без клизања по спољашњој непокретној кружници је композиција ротационог кретања мањег диска око центра непокретне (веће) кружнице константном угаоном брзином w_1 и ротационог кретања унутрашњег (мањег) диска око свог центра константном угаоном брзином w_2 . (погледати Слика 5) Како се диск креће без клизања, то се у додирној тачки два диска брзине поништавају $a\omega_1 = \frac{a}{4}\omega_2$, тј. $\omega_2 = 4\omega_1$.

Након времена t , када не би било ротације мањег диска око сопственог центра, тачке C_0 и M_0 помериле би се у $C_1 = \mathcal{R}_{O, w_1 t}(C_0)$ и $M_1 = \mathcal{R}_{O, w_1 t}(M_0)$, формулама:



Слика 4

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{C_1} \\ y_{C_1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3a}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{C_1} \\ y_{C_1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3a}{4} \cos \phi \\ \frac{3a}{4} \sin \phi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{M_1} \\ y_{M_1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{M_1} \\ y_{M_1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \cos \phi \\ a \sin \phi \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где је $\phi = \omega_1 t$ угао ротације. Како се дешава и сопствена ротација (око центра мањег диска), то је потребно ротирати M_1 око C_1 за угао $\omega_2 t = 4\omega_1 t = 4\phi$ у математички негативном смеру, па $M = \mathcal{R}_{C_1, -4\phi}$. Рачунамо

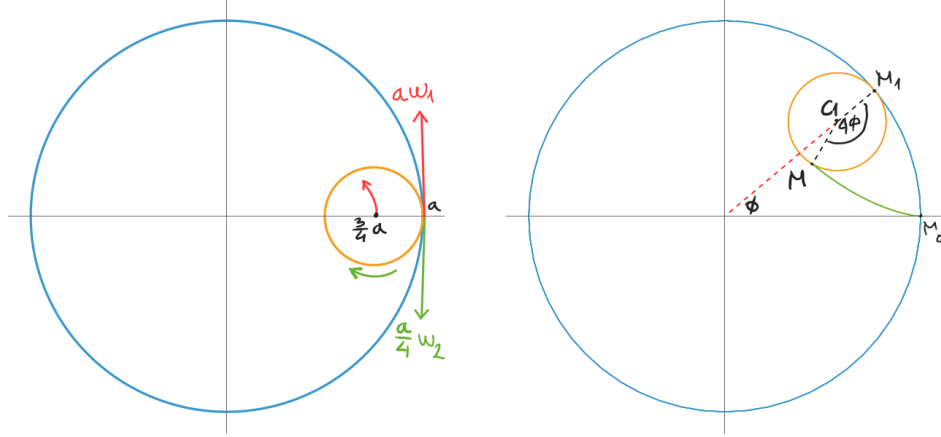
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_M - x_{C_1} \\ y_M - y_{C_1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(-4\phi) & -\sin(-4\phi) \\ \sin(-4\phi) & \cos(-4\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{M_1} - x_{C_1} \\ y_{M_1} - y_{C_1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_M - \frac{3a}{4} \cos \phi \\ y_M - \frac{3a}{4} \sin \phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(4\phi) & \sin(4\phi) \\ -\sin(4\phi) & \cos(4\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \cos \phi - \frac{3a}{4} \cos \phi \\ a \sin \phi - \frac{3a}{4} \sin \phi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3a}{4} \cos \phi + \frac{a}{4} \cos(4\phi) \cos \phi + \frac{a}{4} \sin(4\phi) \sin \phi \\ \frac{3a}{4} \sin \phi - \frac{a}{4} \sin(4\phi) \cos \phi + \frac{a}{4} \cos(4\phi) \sin \phi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{3a}{4} \cos \phi + \frac{a}{4} \cos(3\phi) \\ \frac{3a}{4} \sin \phi - \frac{a}{4} \sin(3\phi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Користећи поново адициону формулу (5) добијамо $M(a \cos^3 \phi, a \sin^3 \phi)$ што се поклапа са параметризацијом γ , тј. добијена тачка M припада астероиду.

б) Одредимо најпре једначину тангенте p у произвољној тачки $M(a \cos^3 t_0, a \sin^3 t_0)$ са астероиде, а затим и пресечне тачке те тангенте са координатним осама. Вектор правца тангенте p је $\gamma'(t_0) = a(-3 \cos^2 t_0 \sin t_0, 3 \sin^2 t_0 \cos t_0) = 3a \cos t_0 \sin t_0(-\cos t_0, \sin t_0)$. Како нам није битна дужина тог вектора за једначину тангенте p имамо:

$$p: \frac{x - a \cos^3 t_0}{-\cos t_0} = \frac{y - a \sin^3 t_0}{\sin t_0}. \quad (6)$$

Координате пресечних тачака $A(x_A, 0)$ и $B(0, y_B)$ тангенте p и координатних оса задовољавају (6) те



Слика 5

рачунамо

$$\frac{x_A - a \cos^3 t_0}{-\cos t_0} = \frac{0 - a \sin^3 t_0}{\sin t_0}$$

$$x_A = a \sin^2 t_0 \cos t_0 + a \cos^3 t_0$$

$$x_A = a \cos t_0.$$

И слично $y_B = a \sin t_0$. Коначно, $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(a \cos t_0)^2 + (a \sin t_0)^2} = a = \text{const}$ што је и требало показати.

в) Уколико се $M(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ пројектује на астероиду у xOy -равни, то њене (x, y) координате морају задовољавати једначину астероиде, па је $z^2 = a^2 - a^2 \cos^6 t - a^2 \sin^6 t = a^2(1 - \cos^6 t - \sin^6 t) = 3a^2 \cos^2 t \sin^2 t$, где последња једнакост следи из

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$(\cos^2 t + \sin^2 t)^3 = 1$$

$$\cos^6 t + 3 \cos^4 t \sin^2 t + 3 \cos^2 t \sin^4 t + \sin^6 t = 1$$

$$3 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) = 1 - \cos^6 t - \sin^6 t.$$

За тражену криву можемо узети нпр $\tilde{\gamma} : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \tilde{\gamma}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t, \sqrt{3}a \cos t \sin t)$.

Задатак 4. Дата је кардиоида својом поларном једначином $\rho = a(1 + \cos \theta), a > 0$.

- Доказати да је дата крива затворена и израчунати њену дужину.
- (домаћи) Доказати да траг ове криве представља трајекторију фиксиране тачке кружнице полупречника $\frac{a}{2}$ који се котрља без клизања споља по непокретном кругу полупречника $\frac{a}{2}$. Скицирати.

Решење. а) Следеће седмице; б) Пробајте сами за домаћи

Литература

- [1] И. Димитријевић, З. Ракић, *Геометрија кривих и површи*, Математички факултет, Београд, 2024.
- [2] <http://poincare.matf.bg.ac.rs/~dimitrije.spadijer/G3/>