

Zadaci iz Geometrije 4

- za rad na vežbama -

3. maj 2017.

1 Stereometrija

1. Data je kocka $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ivice a . Dokazati da je tetraedar $ACB_1 D_1$ pravilan i odrediti mu dužinu ivice.
2. Dat je pravilan tetraedar $ABCD$ ivice a . Neka su M i N redom središta duži AB i CD . Dokazati da je MN zajednička normala mimoilaznih pravih AB i CD . Odrediti dužinu duži MN .
3. Tačke A_1, B_1, C_1, D_1 su težišta pljosni BCD, ACD, ABD, ABC tetraedra $ABCD$. Dokazati da se težišne linije AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 seku u jednoj tački T koja ih deli u odnosu $3 : 1$. (Tačka T se zove **težište** tetraedra, a tetraedar $A_1 B_1 C_1 D_1$ je **dualan** tetraedru $ABCD$).
4. Dokazati da se težišta tetraedra i njemu dulanog tetraedra poklapaju i da je njihovo zajedničko težište centar homotetije ta dva tetraedra.
5. Dat je tetraedar $ABCD$. Tačke M, N, P, Q su, redom, središta ivica AB, CD, AD, BC , tog tetraedra. Dokazati da težište T tetraedra polovi duži MN i PQ .
6. Dat je pravilan tetraedar $ABCD$ ivice a . Odrediti: a) visinu H tetraedra b) ugao između dve susedne pljosni.
7. Pravilan oktaedar je dualno upisan u kocku ivice a . U oktaedar je zatim dualno upisana kocka manje ivice. Odrediti dužine ivica oktaedra i manje kocke.
8. Dat je pravilan oktaedar $ABCDEF$ ivice a . Odrediti: a) rastojanje između dve naspramne (paralelne) pljosni b) ugao između susednih pljosni.
9. Dokazati da je presek kocke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ i ravni α koja sadrži središte S kocke i ortogonalna je na njenu prostornu dijagonalu, pravilan šestougao.
10. Dat je pravilan tetraedar $ABCD$, a tačke M i N su središta njegovih ivica AB i CD .
 - a) Dokazati da rotacija $\mathcal{R}$ oko prave MN za opružen ugao preslikava tetraedar na sebe.
 - b) Dokazati da proizvoljna ravan α koja sadrži pravu MN razlaže tetraedar na dva podudarna poliedra.
 - c) Dokazati da postoji ravan α koja sadrži pravu MN , a koja tetraedar seče po kvadratu.
11. a) Odrediti ravan čiji je presek sa kockom paralelogram koji nije pravougaonik. b) Da li presek kocke i ravni može biti trapez?
12. Date su tri tačke P, Q, R na ivicama kocke. Skicirati presek kocke i ravni α određene tim tačkama.

13. Zadati tačke P, Q, R na ivicama kocke tako da je presek njima određene ravni α i kocke a) trougao b) četrougao d) petougao e) šestougao.
14. Odrediti ravan α koja seče pravilni oktaedar po pravilnom šestouglu.
15. Dat je pravilan tetraedar $ABCD$. Tačke M, N, P, Q su, redom, središta ivica AB, CD, AD, BC , tog tetraedra. Dokazati da je $MN \perp PQ$.

2 Afina preslikavanja

1. Nacrtati sliku trougla $\triangle ABC$ pri homotetiji sa centrom u tački S sa koeficijentom $k = -2$.
2. Nacrtati sliku kvadrata $ABCD$ pri rotaciji oko tačke S za ugao $\phi = \frac{\pi}{4}$.
3. Odrediti formule rotacije oko tačke $C(-2, 3)$ za ugao $\phi = \frac{5\pi}{6}$. Odrediti sliku N' tačke $N(1, 3)$.
4. Odrediti formule homotetije sa centrom $S(1, 2)$ i koeficijentom $k = 3$. Odrediti sliku tačke $M(2, 5)$.
5. Odrediti formule smicanja koje kvadrat $ABCD, A(0, 0), B(2, 0), C(2, 2), D(0, 2)$, preslikava u paralelogram $A'B'C'D', A'(0, 0), B'(2, 0), C'(5, 2), D'(3, 2)$.
6. Odrediti formule afinog preslikavanja f koje "kanonski" trougao $A_0B_0C_0, A_0(0, 0), B_0(1, 0), C_0(0, 1)$ preslikava u trougao $ABC, A(1, 2), B(2, 4), C_0(3, 3)$.
7. a) Odrediti formule afinog preslikavanja h koje trougao ABC preslikava u trougao $A'B'C'$, ako je $A(1, 1), B(1, 2), C(4, 4)$ i $A'(5, -4), B'(7, -8), C'(4, 1)$. b) Odrediti odnos površina tih trouglova. c) Da li trouglovi imaju istu orijentaciju?
8. Afino preslikavanje f slika redom temena kvadrata $ABCD, A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1), D(0, 1)$, u temena četvorougla $A'B'C'D', A'(2, 0), B'(4, -\frac{3}{2}), D'(5, 4)$. a) Odrediti koordinate tačke $C' = f(C)$; b) Precizno opisati četvorougao $A'B'C'D'$; c) Prestaviti f kao kompoziciju, redom, skaliranja, rotacije i translacije i odrediti mu jednačine.
9. Dati su kvadrat $ABCD, A(0, 0), B(2, 0), C(2, 2), D(0, 2)$ i paralelogram $A'B'C'D', A'(4, 2), B'(9, 2), C'(11, 2), D'(6, 2)$. a) Odrediti koordinate tačke D . b) Odrediti afino preslikavanje f koje slika $ABCD$ u $A'B'C'D'$ kao kompoziciju, redom, skaliranja, smicanja i translacije.
10. Afino preslikavanje f slika redom temena kvadrata $ABCD, A(0, 0), B(2, 0), C(2, 2), D(0, 2)$, u temena četvorougla $A'B'C'D', A'(3, 0), B'(15, -5), D'(\frac{11}{2}, 6)$. a) Odrediti teme $C' = f(C)$; b) Precizno opisati četvorougao $A'B'C'D'$; c) Predstaviti f kao kompoziciju, redom, skaliranja, rotacije i translacije i odrediti mu formule; d) Šta je slika kruga upisanog u kvadrat $ABCD$ i kolika joj je površina.
11. Odrediti afino preslikavanje (kao kompoziciju rotacije, homotetije i translacije) koje kvadrat $ABCD, A(0, 0), B(2, 0), C(2, 2), D(0, 2)$, preslikava u kvadrat $SCPD$, gde je $S = AC \cap BD$, a P se određuje kao četvrta tačka kvadrata. Skicirati!

3 Projektivna preslikavanja

1. a) Odrediti, u homogenim koordinatama, jednačinu prave $p = AB$, $A(1, \frac{5}{2})$ i $B(-3, 0)$; b) Pokazati da tačka $C(-1 : 5 : 3)$ pripada pravoj p ; c) Odrediti tačku D takvu da važi $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.
2. U proširenoj afinoj ravni date su prave $m : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, i $n : 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$. a) Odrediti presek P pravih m i n ; b) Odrediti pravu k koja sadrži tačke P i $C(-1 : 5 : 3)$ i pravu l koja sadrži tačku P i paralelna je pravoj $p : 5x - 8y + 15 = 0$; c) Odrediti dvorazmeru pravih (m, n, k, l) .
3. Date su kolinearne tačke $A(1, 1)$, $B(5, 5)$, $C(-1, -1)$, $D(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Koristeći afini smisao dvorazmere, izračunati (A, B, C, D) .
4. Telefonski stubovi $A, B, C, D, E, F \dots$ su u stvarnosti udaljeni $40m$ i kolinearni. Koja je pozicija slika stubova D', E' i F' na perspektivnom crtežu ako je $A'B' = 5cm$, $B'C' = 4cm$?
5. a) "Pokazati" da ivice trotemenika ABC razbijaju projektivnu ravan trotemenika na 4 oblasti; b) Dokazati da su te oblasti projektivno ekvivalentne.
6. Data je matrica

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i tačke $A_0(0, 0)$, $B_0(1, 0)$ i $C_0(0, 1)$. a) Odrediti sliku $A'B'C'$ trotemenika $A_0B_0C_0$ pri projektivnom preslikavanju f čija je matrica P . b) Skicirati trotemenik $A'B'C'$ i osenčiti sliku unutrašnjosti trougla $A_0B_0C_0$.

7. a) Odrediti projektivno preslikavanje kojim se pravougaonik $ABCD$, $A(-2, -1)$, $B(2, -1)$, $C(2, 1)$, $D(-2, 1)$ slika u trapez $A'B'C'D'$, $A'(-3, -1)$, $B'(3, -1)$, $C'(1, 1)$, $D'(-1, 1)$; b) Dokazati (bez računanja) da su središta duži AB i CD kao i beskonačno daleka tačka prave AB jedine fiksne tačke ovog preslikavanja.

4 Homologije

1. Afina homologija je zadata osom s i parom odgovarajućih tačaka M, M' . Nacrtati (treba samo crtež¹) sliku kvadrata u toj homologiji.
2. Afina homologija je zadata osom s i parom odgovarajućih tačaka S i S' . Nacrtati (treba samo crtež) sliku kruga sa centrom S u toj homologiji.
3. Dokazati da su osa s , protivosa u i horizont v' međusobno paralelne prave.
4. Dokazati da je perspektivno kolinearno preslikavanje određeno sa
 - a) centrom S , osom s i parom tačaka A, A' ;
 - b) centrom S , osom s i parom pravih a, a' ;
 - c) centrom S , osom s i protivosom u ;
 - d) centrom S , osom s i horizontom v' ;
 - e) centrom S , protivosom u i horizontom v' .
5. (crtež) Odrediti sliku duži AB u homologiji f koja je zadata osom s , protivosom u i centrom S ako: a) Duž AB seče protivosu; b) Duž AB ne seče protivosu.

¹Lenjirom i šestarom, obavezno

6. (crtež) Dati su centar S , osa s i protivosu u homologije f . Ako trougao seče protivosu, odrediti njegovu sliku.
7. Dokazati da je svaka neidentička projektivna involucija ($f^2 = Id$), projektivne ravni, homologija.
8. (analiza, konstrukcija, crtež, diskusija) Data su prava s , p i trougao ABC . Odrediti afinu homologiju f čija je osa prava s , zraci afinosti paralelni pravoj p , a slika trougla ABC ($AC \cong BC$) jednakokraki trougao $A'B'C'$.
9. (analiza, konstrukcija, crtež, diskusija) Data je prava s i paralelogram $ABCD$. Odrediti afinu homologiju sa osom s koja dati paralelogram preslikava u kvadrat.
10. (analiza, konstrukcija, crtež, diskusija) Dat je paralelogram $ABCD$ i prave p, s . Odrediti afinu homologiju f čija je osa prava s , zraci afinosti su paralelni pravoj p , a slika datog paralelograma romb.
11. (analiza, konstrukcija, dokaz, diskusija) Data je veća osa AB elipse i tačka M koja pripada elipsi. Konstruisati manju osu elipse.

5 Krive drugog reda

1. (radjeno na predavanjima) a) Pokazati da projektivno preslikavanje f proširene afine ravni zadato formulama $\lambda x'_1 = x_3, \lambda x'_2 = x_2, \lambda x'_3 = x_1$, preslikava krug $x^2 + y^2 = 1$ u hiperbolu $x^2 - y^2 = 1$. b) Naći zapis preslikavanja f u afnim koordinatama. c) Da li je f homologija i ako jeste odrediti mu centar osu i protivosu?
2. Pokazati da je krug projektivno ekvivalentan paraboli u proširenoj afinoj ravni.
3. a) U proširenoj afinoj ravni odrediti centar krive drugog reda Γ date jednačinom $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$. b) Odrediti tangente iz tačke $A(2 : 2 : -1)$ na Γ . c) Odrediti tangente iz tačke $P(1 : 1 : -5)$ na Γ .
4. Dokazati da je direktrisa elipse (hiperbole, parabole) polara odgovarajuće žiže.
5. Dokazati da su središta paralelnih tetiva elipse kolinearne tačke i da prava koja ih sadrži, sadrži centar elipse (konjugovani dijometri). Šta se dešava u slučaju hiperbole, odnosno parabole?
6. Elipsa upisana u trougao ABC dodiruje njegove stranice BC, CA, AB redom u tačkama P, Q, R . Dokazati da su prave AP, BQ i CR konkurentne.
7. (analiza, konstrukcija, dokaz, diskusija) Date su tačke A, B, C, D, E nedegenerisane krive drugog reda Γ i prava $p \ni A$. Konstruisati drugu presečnu tačku krive Γ i prave p .
8. (analiza, konstrukcija, dokaz, diskusija) Date su asimptote a, b i jedna tangenta t hiperbole Γ . Iz tačke $S \in t$ konstruisati drugu tangentu m na hiperbolu Γ .
9. Date su tačke A, B, C i pravac o' ose parabole, kao i prava $p \ni A$. Konstruisati drugu presečnu tačku X prave p i parabole.

6 Dezargova teorema

1. Date su prave a, b koje se seku u tački S i tačka P koja im ne pripada. Koristeći samo lenjir konstruisati pravu $c = PS$ ne koristeći tačku S .
2. U proizvoljan četvorougao upisan je trapez čije su osnove paralelne jednoj dijagonali četvorougla. Dokazati da se bočne strane trapeza seku na drugoj dijagonali četvorougla.

7 Metoda odstojanja normalnog projektovanja

7.1 Osnovni zadaci

1. Data je prava p projekcijama svojih tačaka $M(M', OM_0)$ i $N(N', ON_0)$. Konstruisati:
a) trag prave p ; b) pravu veličinu duži MN ; c) nagibni ugao prave p .
2. Data je prava $p(P, M(M', OM_0))$ i tačka $R(R', OR_0)$ koja joj ne pripada. Odrediti pravu r koja sadrži tačku R i paralelna je pravoj p .
3. Odrediti međusobni položaj pravih $p(P, M(M', OM_0))$ i $q(Q, N(N', ON_0))$ ako je:
a) $p' \parallel q'$; b) $p' \cap q' = \{R'\}$.
4. Odrediti ravan α koja sadrži
a) dve paralelne prave $p(P, M(M', OM_0))$ i $q(Q)$;
b) dve prave koje se seku $p(P, M(M', OM_0))$, $q(Q, M(M', OM_0))$ u tački M ;
c) pravu $p(P, M(M', OM_0))$ i tačku $A(A', OA_0)$ koja joj ne pripada.
5. Data je ravan $\alpha(a, A', OA_0)$, tačka S koja joj pripada i duž d . Nacrtati projekciju kruga k koji pripada ravni α , ima centar S , a poluprečnik mu je podudaran duži d .
6. Odrediti projekciju kruga čiji je centar data tačka $S(S', OS_0)$, a koji dodiruje datu pravu $p(P, Q', OQ_0)$.
7. Odrediti presek ravni $\alpha(a, A', OA_0)$ i $\beta(b, B', OB_0)$ ako važi: a) $a \cap b = \{P\}$; b) $a \parallel b$.
8. Odrediti rastojanje između paralelnih ravni $\alpha(a, A', OA_0)$ i $\beta(b)$.
9. Odrediti prodor prave $p(P, A', OA_0)$ kroz ravan $\tau(t, M', OM_0)$.
10. Date su ravan $\tau(t, K', OK_0)$ i tačka $M(M', OM_0)$ koja joj ne pripada.
a) Konstruisati normalu n iz tačke M na ravan τ .
b) Odrediti tačku N simetričnu tački M u odnosu na τ .
11. Date su prava $n(N, S', OS_0)$ i tačka $K(K', OK_0)$. a) Konstruisati ravan τ koja sadrži tačku K i normalna je na pravu n . b) Odrediti udaljenost tačke K od prave n .
12. Data je ravan $\alpha(a, A', OA_0)$ i tačka $M(M', OM_0)$ koja joj ne pripada. Konstruisati trag ravni β koja sadrži tačku M i paralelna je sa α .

7.2 Složeniji zadaci

1. Metodom odstojanja data je ravan $\tau(t, S', OS_0)$. Konstruisati projekciju pravilne četverostrane piramide $ABCDV$, čija osnova $ABCD$ ima središte S i pripada ravni τ . Visina piramide je podudarna datoj duži h . Odrediti zatim presek piramide i ravni σ koja je paralelna ravni τ i sadrži tački S_1 koja visinu deli u odnosu 1 : 2 počevši od vrha V .
2. Metodom odstojanja data je ravan $\tau(t, L', OL_0)$ i tačka $E(E', OE_0)$ koja joj ne pripada. Konstruisati projekciju pravilnog oktaedra $ABCDEFGH$, čije je teme data tačka E , dijagonalni presek $ABCD$ pripada ravni τ , a ivica AB gradi ugao $\frac{\pi}{6}$ sa tragom t ravni τ . Odrediti zatim presek oktaedra sa ravni β koja sadrži pravu t i deli visinu oktaedra EF u odnosu 1 : 3 mereno od tačke E .

3. Metodom odstojanja data je prava $s(S, R', OR_0)$ i tačka $A(A', OA_0)$ koja joj ne pripada. Konstruisati projekciju valjka kome je osa prava s , tačka A pripada kružnici jedne osnove, a visina valjka je jednaka prečniku osnove. Odrediti zatim presek valjka i ravni β koja sadrži tangentu na osnovu valjka u tački A i središte visine valjka.
4. Metodom odstojanja data je prava $p(P, Q', OQ_0)$ i tačka $C(C', OC_0)$. Konstruisati projekciju tetraedra $ABCD$ čije teme C je data tačka, a ivica AB pripada datoj pravoj p .
5. Metodom odstojanja data je ravan $\tau(t, M(M', OM_0))$ i tačka $A_1(A'_1, OA_{10})$. Konstruisati projekciju kocke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ čije je teme data tačka A_1 , pljosan $ABCD$ pripada ravni τ , a ivica AB gradi ugao od $\frac{\pi}{3}$ sa tragom t ravni τ . Odrediti zatim presek kocke i ravni β koja sadrži centar kocke i paralelna je sa projekcijskom ravni π .
6. Metodom odstojanja data je ravan $\tau(t, M(M', OM_0))$ i tačka $V(V', OV_0) \notin \tau$. Odrediti projekciju kupe kojoj je vrh data tačka V , osnova pripada ravni τ , a visina kupe je duplo veća od prečnika osnove. Odrediti zatim presek kupe i ravni β koja sadrži pravu $r : M \in r, r \parallel t$ i deli visinu kupe u odnosu $2 : 3$ mereno od vrha V .
7. Date su mimoilazne prave $p(P, A', OA_0)$ i $q(Q, B', OB_0)$. Odrediti zajedničku normalu n i rastojanje između pravih p i q .
8. Data je tačka $E(E', OE_0)$ i prava $p(P, N', ON_0)$ koja ne sadrži tačku E . Konstruisati projekciju pravilnog oktadera $ABCDEFG$ ako je teme E data tačka, a ivica AB pripada pravoj p (ABE je pljosan oktaedra).
9. Data je ravan $\tau(t, M', OM_0)$ i tačka $S(S', OS_0)$ van ravni τ . Predstaviti normalnu projekciju pravog valjka ako je tačka S središte osnove, τ tangentna ravan valjka i izvodnice valjka grade ugao od $\frac{\pi}{6}$ sa tragom t ravni τ . Visina valjka je jednaka $3r$, gde je r poluprečnik osnove.
10. Metodom odstojanja normalnog projektovanja data je tačka $A(A', OA_0)$ i ravan $\tau(t, M', OM_0)$. Konstruisati projekciju kocke $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ako je teme A data tačka, dijagonalni presek $BDD_1 B_1$ pripada ravni τ , a prava BD sadrži M .
11. Data je tačka $A(A', OA_0)$ i ravan $\tau(t, M', OM_0)$. Konstruisati projekciju tetraedra $ABCD$ kome je teme A data tačka, pljosan BCD pripada ravni τ , a ivica BC zaklapa ugao od $\frac{\pi}{6}$ sa tragom t ravni τ . Odrediti zatim presek tetraedra sa ravni β čiji je trag prava t i koja sadrži središte visine tetraedra iz temena A .
12. Data je tačka $S(S', OS_0)$ i prava $p(P, A', OA_0)$. Konstruisati projekciju prave kupe kojoj je središte osnove tačka S , jedna izvodnica kupe pripada pravoj p , a ugao između visine kupe i izvodnice jednak $\frac{\pi}{6}$.
13. Date su tačke S i T . Konstruisati projekciju sfere koja ima centar u S i sadrži T . Zatim odrediti presek sfere i ravni τ koja je normalna na duž ST i deli je u odnosu $1 : 2$ posmatrano od S .
14. Metodom odstojanja date su paralelne ravni $\alpha(a, A(A', OA_0))$ i $\beta(b)$. Odrediti projekciju kvadra čije osnove pripadaju ravnima α i β ako je odnos dužine, širine i visine kvadra $3 : 2 : 1$. Tačka A je jedno teme kvadra, a ivica AB gradi ugao $\frac{\pi}{8}$ sa tragom a ravni α .