

ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ВЕРОВАТНОЋЕ

4. септембар 2024.

- Милан истовремено баца две коцкице. Након тога, Милан баца онолико коцкица колико је добио шестица у првом бацању. Ако је Милан добио укупно две шестике, одредити вероватноћу да је збир добијених бројева у првом бацању паран.

Решење: Дефинишемо следеће догађаје:

- A - Милан је добио укупно две шестике
- B - збир добијених бројева у првом бацању је паран

Тражи се $P(B|A)$:

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)}$$

Милан у првом бацању може да добије 0, 1 или 2 шестике, па имамо потпун систем догађаја:

- H_1 - у првом бацању је добио 0 шестица
- H_2 - у првом бацању је добио тачно 1 шестицу
- H_3 - у првом бацању је добио 2 шестике

$$P(H_1) = \frac{25}{36}, \quad P(H_2) = \frac{10}{36}, \quad P(H_3) = \frac{1}{36}$$

Применом формуле потпуне вероватноће, добијамо:

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)$$

где су:

$P(A|H_1) = 0$ (ако у првом бацању није добио ниједну шестицу, онда више не баца коцкице па не може никако да добије укупно 2 шестике)

$P(A|H_2) = \frac{1}{6}$ (у другом бацању баца једну коцкицу и потребно му је да добије шестицу)

$P(A|H_3) = \frac{25}{36}$ (у другом бацању баца 2 коцкице и потребно је да не добије ниједну шестицу)

$$P(A) = 0 + \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{36} + \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{85}{1296}$$

Сада рачунамо $P(BA)$:

$$P(BA) = P(BA|H_1)P(H_1) + P(BA|H_2)P(H_2) + P(BA|H_3)P(H_3)$$

где су:

$$P(BA|H_1) = 0$$

$P(BA|H_2) = \frac{P(BAH_2)}{P(H_2)} = \frac{\frac{4}{36} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{10}{36}} = \frac{\frac{4}{216}}{\frac{10}{36}} = \frac{4}{216} \cdot \frac{36}{10} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$ (ако је у првом бацању пала тачно једна шестица (догађај H_2) то значи да друга коцкица мора да буде двојка или четворка да би збир био паран (таквих исхода има 4 од укупно 36 исхода). Након тога Милан баца једну коцкицу и то мора да буде шестица да би укупно имао две шестике (одатле добијамо $\frac{1}{6}$))

$P(BA|H_3) = \frac{25}{36}$ (ако су у првом бацању пале две шестике онда је догађај B свакако испуњен, а за догађај A је потребно да у другом бацању не падне ниједна шестица).

Дакле, сада је:

$$P(BA) = 0 + \frac{4}{216} + \frac{25}{1296} = \frac{49}{1296}$$

Коначно:

$$P(B|A) = \frac{49}{85}$$

2. За густине расподела f_X и f_Y независних случајних величина X и Y важи $f_X(x) = e^{-x}$, $x \in (0, +\infty)$ и $f_Y(y) = 2y$, $y \in (0, 1)$. Ако је $Z = X + 2Y + 1$, одредити густину расподеле случајне величине Z .

Решење: Прво одређујемо интервал вредности које може да узме случајна величина Z :

$$Z \in (1, +\infty)$$

Сада рачунамо функцију расподеле случајне величине Z у произвољној тачки $z \in (1, +\infty)$:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + 2Y + 1 \leq z) = P\left(Y \leq \frac{-X + z - 1}{2}\right) = \iint_D f(x, y) dx dy$$

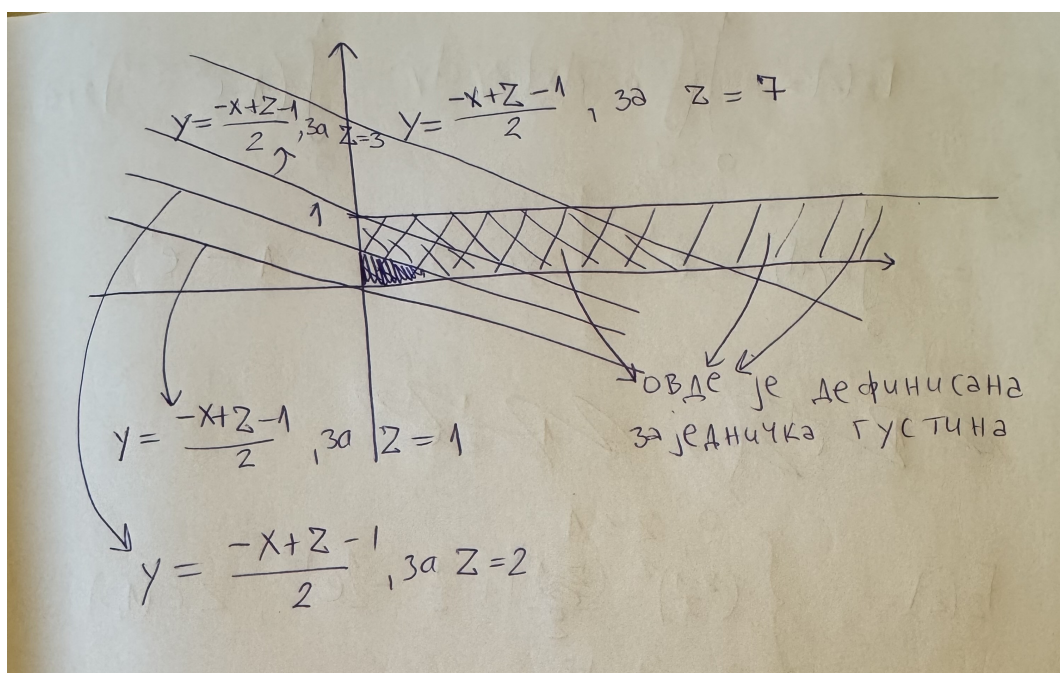
где је:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq \frac{-x + z - 1}{2}\}.$$

Како су X и Y независне, заједничка густина вектора (X, Y) је:

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = e^{-x} \cdot 2y, x \in (0, +\infty), y \in (0, 1).$$

Потребно је да нацртамо слику да бисмо видели како изгледа пресек области D и области дефинисаности густине вектора (X, Y) . Са слике видимо да имамо два случаја и да се прелазак са једног на други случај дешава за $z = 3$.



1° случај: $z \in (1, 3)$

Пресек области D и области на којој је дефинисана заједничка густина је троугао:

$$0 \leq y \leq \frac{z-1}{2}$$

$$0 \leq x \leq -2y + z - 1$$

Функција расподеле у овом случају је:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_0^{\frac{z-1}{2}} \left(\int_0^{-2y+z-1} e^{-x} dx \right) 2y dy = \int_0^{\frac{z-1}{2}} (1 - e^{2y-z+1}) 2y dy = \int_0^{\frac{z-1}{2}} 2y dy - e^{1-z} \int_0^{\frac{z-1}{2}} 2ye^{2y} dy = \\ &= \left(\frac{z-1}{2} \right)^2 - e^{1-z} \left(\frac{(z-1) \cdot e^{z-1}}{2} - \frac{e^{z-1}}{2} + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{z-1}{2} \right)^2 - \frac{z-1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{e^{1-z}}{2} \end{aligned}$$

2° случај: $z \in [3, +\infty)$

Пресек области D и области на којој је дефинисана заједничка густина је трапез:

$$0 \leq y \leq 1$$

$$0 \leq x \leq -2y + z - 1$$

Функција расподеле у овом случају је:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_0^1 \left(\int_0^{-2y+z-1} e^{-x} dx \right) 2y dy = \int_0^1 (1 - e^{2y-z+1}) 2y dy = \int_0^1 2y dy - e^{1-z} \int_0^1 2ye^{2y} dy = \\ &= 1 - e^{1-z} \left(e^2 - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \right) = 1 - \frac{e^{3-z}}{2} - \frac{e^{1-z}}{2} \end{aligned}$$

Обједињавањем добијених резултата добијамо функцију расподеле:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 1 \\ \left(\frac{z-1}{2} \right)^2 - \frac{z-1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{e^{1-z}}{2}, & z \in (1, 3) \\ 1 - \frac{e^{3-z}}{2} - \frac{e^{1-z}}{2}, & z \geq 3 \end{cases}$$

Коначно, густину расподеле добијамо диференцирањем функције расподеле:

$$f_Z(z) = F'_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 1 \\ \frac{z-2}{2} + \frac{e^{1-z}}{2}, & z \in (1, 3) \\ \frac{e^{3-z}}{2} + \frac{e^{1-z}}{2}, & z \geq 3 \end{cases}$$

3. За карактеристичну функцију случајне величине X важи да је $\varphi_X(t) = e^{2it} \left(\frac{2}{25} \cos t + \frac{23}{25} \right) - \frac{i}{2} \sin(2t)$.
Одредити карактеристичну функцију случајне величине X^2 .

Решење:

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= e^{2it} \left(\frac{2}{25} \cos t + \frac{23}{25} \right) - \frac{i}{2} \sin(2t) = \\ &= \frac{23}{25} e^{2it} + \frac{2}{25} e^{2it} \cdot \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2} = \\ &= \frac{23}{25} e^{2it} + \frac{1}{25} e^{3it} + \frac{1}{25} e^{it} - \frac{1}{4} e^{2it} + \frac{1}{4} e^{-2it} = \\ &= \frac{67}{100} e^{2it} + \frac{1}{25} e^{3it} + \frac{1}{25} e^{it} + \frac{1}{4} e^{-2it} \end{aligned}$$

Дакле X има следећи закон расподеле:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{25} & \frac{67}{100} & \frac{1}{25} \end{pmatrix}$$

Сада лако налазимо закон расподеле од X^2 :

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{25} & \frac{23}{25} & \frac{1}{25} \end{pmatrix}$$

И коначно налазимо карактеристичну функцију:

$$\varphi_{X^2}(t) = E(e^{itX^2}) = \frac{1}{25}e^{it} + \frac{23}{25}e^{4it} + \frac{1}{25}e^{9it}$$