

ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ВЕРОВАТНОЋЕ

7. фебруар 2024.

1. Из кутије у којој се налазе 4 беле и 3 црне куглице, извлаче се куглице. Сваки пут када се извуче бела куглица, она се враћа у кутију и у кутију се додаје још једна црна куглица, а када се извуче црна куглица, она се оставља ван кутије. Ако је у другом извлачењу извучена црна куглица, израчунати вероватноћу да ће у трећем извлачењу бити извучена бела куглица.

Решење: Од интереса су нам следећи догађаји:

A = у трећем извлачењу бела куглица

B = у другом извлачењу црна куглица

Вероватноће оба догађаја зависе од исхода у првом извлачењу па уводимо следеће хипотезе:

H_1 : прво извучена бела

H_2 : прво извучена црна

Тражена условна вероватноћа је

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(AB|H_1)P(H_1) + P(AB|H_2)P(H_2)}{P(B|H_1)P(H_1) + P(B|H_2)P(H_2)} \\ &= \frac{\frac{4}{8} \frac{4}{7} \frac{4}{7} + \frac{2}{6} \frac{4}{5} \frac{3}{7}}{\frac{4}{8} \frac{4}{7} + \frac{2}{6} \frac{3}{7}} = \frac{68}{105} \end{aligned}$$

2. За густине расподела независних случајних величина X и Y важи да је $f_X(x) = 2x$, $x \in (0, 1)$, и $f_Y(y) = \frac{1}{y^2}$, $y \geq 1$. Израчунати условну вероватноћу

$$P\left\{X^2 + Y^2 < \frac{9}{4} \mid Y \geq \sqrt{3}X\right\}.$$

Решење: Како су X и Y независне, заједничка густина је $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{2x}{y^2}$, $x \in (0, 1)$, $y \geq 1$.

$$\begin{aligned} P\left\{X^2 + Y^2 < \frac{9}{4} \mid Y \geq \sqrt{3}X\right\} &= \frac{P\left\{X^2 + Y^2 < \frac{9}{4}, Y \geq \sqrt{3}X\right\}}{P\{Y \geq \sqrt{3}X\}} \\ &= \frac{\int \int_{D_1} f(x, y) dx dy}{\int \int_{D_2} f(x, y) dx dy}, \end{aligned}$$

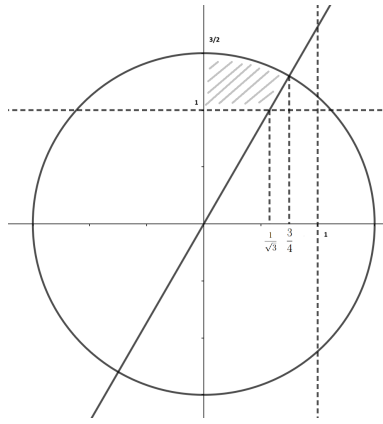
где је

$$D_1 = \{(x, y) : x \in (0, 1), y \geq 1, x^2 + y^2 < \frac{9}{4}, y \geq \sqrt{3}x\}$$

$$D_2 = \{(x, y) : x \in (0, 1), y \geq 1, y \geq \sqrt{3}x\}$$

Уз помоћ слике долазимо до следећег решења:

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \int_1^{\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}} \frac{2x}{y^2} dy dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{3}{4}} \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{\frac{9}{4}-x^2}} \frac{2x}{y^2} dy dx \\ &= \frac{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \int_{\frac{y}{\sqrt{3}}}^{\frac{y}{\sqrt{3}}} \frac{2x}{y^2} dx dy + \int_0^1 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\infty} \frac{2x}{y^2} dy dx}{\int_0^1 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\infty} \frac{2x}{y^2} dy dx} = 0.1585 \end{aligned}$$



3. Величина слике на телефону, у мегабајтима, има нормалну расподелу са математичким очекивањем 5 и дисперзијом 3. У меморији телефона има слободних 15000 мегабајта за слике. Колико највише слика корисник може да сачува у меморији телефона, па да са вероватноћом 99% буде сигуран да неће попунити сву меморију?

Решење: Нека је X_i величина i -те слике. Сматрамо да су величине слика међусобно независне случајне величине са истом нормалном $\mathcal{N}(5, 3)$ расподелом. У задатку се тражи највећи природан број n за који важи

$$P \left\{ \sum_{i=1}^n X_i < 15000 \right\} \geq 0.99.$$

Знамо да $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ има нормалну $\mathcal{N}(5n, 3n)$ расподелу. Како је $ES_n = 5n$, $DS_n = 3n$, стандардизацијом добијамо:

$$\begin{aligned} P \left\{ S_n^* < \frac{15000 - 5n}{\sqrt{3n}} \right\} &\geq 0.99. \\ \Leftrightarrow \Phi \left(\frac{15000 - 5n}{\sqrt{3n}} \right) &\geq 0.99 \\ \Leftrightarrow \frac{15000 - 5n}{\sqrt{3n}} &\geq \Phi^{-1}(0.99) = 2.33 \end{aligned}$$

Увођењем смене $t = \sqrt{n}$, $t > 0$, добијамо квадратну једначину

$$-5t^2 - 2.33\sqrt{3}t + 15000 \geq 0,$$

чије је решење $t \in (0, 54.37)$. Дакле $n \leq (54.34)^2 = 2956.097$, па је највећи број слика које корисник може да сачува $n = 2956$.