

# МАТЕМАТИКА 2 Б

## Писмени испит

Мартовски испитни рок

17. 04. 2021.

1. Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (а) Одредити бројеве  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  тако да важи

$$A^2 + \alpha A + \beta \mathcal{I}_3 = \mathcal{O}_3.$$

- (б) За свако  $n \in \mathbb{N}$  израчунати  $A^n$ .

2. Нека су дате праве

$$(p) : \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3} \quad \text{и} \quad (q) : \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}.$$

- (а) Доказати да су праве  $p$  и  $q$  мимолилазне.

- (б) Одредити једначину равни која је паралелна правама  $p$  и  $q$  и која је једнако удаљена од њих.

3. Нека функција  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  задовољава неједнакост

$$|f(x, y)| \leq x^2 + y^4 \quad \text{за свако} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Доказати да је функција  $f$  диференцијабилна у тачки  $(0, 0)$ .

4. Нека је дата функција  $f : [0, +\infty)^3 \rightarrow \mathbb{R}$  дефинисана са

$$f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{15}}$$

и скуп  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) \leq 1\}$ .

- (а) Израчунати запремину скупа  $F$ .

- (б) Одредити минимум функције  $f$  под условом да је  $xyz = 1$  за све  $x, y, z \in (0, +\infty)$ .

5. Нека је  $S$  део површи  $x^2 + y^2 = z^2$  коју исеца површ  $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$  при чему је  $z \geq 0$ . Израчунати интеграл

$$\iint_S (xy + 2y - 5) \, dS.$$

**Напомена:** Сваки задатак вреди 25 поена и раде се четири од пет задатака по избору. Време за израду задатака износи 240 минута.