

Т: (ПРИНЦИП УНИФОРМНЕ ОГРАНИЧЕНОСТИ) X Банахов, Y нормиран, $F \subset B(X, Y)$

Ако је $(\forall x \in X) \sup_{A \in F} \|Ax\| < \infty$, онда је $\sup_{A \in F} \|A\| < \infty$

Ј: пунктуално ограничена фамилија ограничених оператора је унитарно ограничена

Последица: X Банахов, Y нормиран, $(A_n)_n$ низ у $B(X, Y)$ т.д. $(\forall x \in X) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$
 $\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$

$\Delta: F = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$(\forall x \in X) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x\|$

$\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n x\| < +\infty \xRightarrow{\text{н.з.о}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$ □

Т: (БАНАХ-ШТАЈНХАУС) X, Y Банахови, $A_n \in B(X, Y)$ за све $n \in \mathbb{N}$.

Низ $(A_n x)_{n=1}^\infty$ конвертира за све $x \in X$ ако важи: (1) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ постоји за све

ФУНДАМЕНТАЛНИ СКУП

$x \in X_0$, где је X_0 т.д.

$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x} = X$.

При горњим условима, са $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ је дефинисан ограничених линеаран оператор $(A \in B(X, Y))$ за чију норму важи $\|A\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|$.

① Нeka је $f \in C[0, 1]$. Израчунајте $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^\infty x^n f(x^n)$.

$\sum_{n=0}^\infty x^n f(x^n) < \infty$ јер важи $\sum_{n=0}^\infty |x^n f(x^n)| \leq \|f\|_\infty \sum_{n=0}^\infty x^n < +\infty$ али још увек не знамо да постоји траже-ни лимес!

ХАЈНЕОВА Т. $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^\infty x^n f(x^n) = \lim_{k \rightarrow \infty} (1-x_k) \sum_{n=0}^\infty x_k^n f(x_k^n)$, за произвољан низ

$(x_k)_k \in [0, 1]$ т.д. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 1$.

$\forall k \in \mathbb{N}$ дефинишимо оператор $A_k: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $A_k(f) = (1-x_k) \sum_{n=0}^\infty x_k^n f(x_k^n)$.

$(\forall k \in \mathbb{N}) A_k$ је линеар. функционал на $C[0, 1]$.

(1) $|A_k(f)| \leq (1-x_k) \sum_{n=0}^\infty |x_k^n f(x_k^n)| \leq (1-x_k) \|f\|_\infty \sum_{n=0}^\infty x_k^n = \frac{1-x_k}{1-x_k} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$

$\Rightarrow \|A_k\| \leq 1$ за све $k \geq 1$

(одим тим и $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|A_k\| < +\infty$)

(2) Шта је фундаментални скуп у $C[0, 1]$? Полиномијалне ф.е. $(\{1, t, t^2, t^3, \dots\})$

$f_k(t) = t^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \rightsquigarrow \{f_k \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ је фундаментални скуп у $C[0, 1]$!
 $\overline{\lim_{k \rightarrow \infty} f_k} = C[0, 1]$

Питамо се да ли $(\forall m \in \mathbb{N}) \exists \lim_{k \rightarrow \infty} A_k(f_m)$?

$$A_k(f_m) = (1-x_k) \sum_{n=0}^{\infty} x_k^n \cdot x_k^{nm} = (1-x_k) \sum_{n=0}^{\infty} (x_k^{m+1})^n = (1-x_k) \cdot \frac{1}{1-x_k^{m+1}}$$

$$= (1-x_k) \cdot \frac{1}{(1-x_k)(1+x_k+\dots+x_k^m)} = \frac{1}{1+x_k+\dots+x_k^m}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A_k(f_m) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x_k+\dots+x_k^m} = \frac{1}{m+1} \stackrel{(*)}{=} \int_0^1 f_m(t) dt!$$

ОД О ЈЕ ВАЖНО ПРИМЕТИТИ

Т.Б-Ш ($C[0,1]$ и $\mathbb{C}$ су банахови)

(1), (2) $\Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} A_k(f)$ за све $f \in C[0,1]$ и, додатно,

$A(f) := \lim_{k \rightarrow \infty} A_k(f)$ је огр. линеаран оператор.

Да бисмо решили задатак, треба нам да знамо тачно шта је A .

Уочимо $B: C[0,1] \rightarrow \mathbb{C}$, $B(f) = \int_0^1 f(t) dt$ за све $f \in C[0,1]$. Јаво се види да важи $B \in \mathcal{B}(C[0,1], \mathbb{C})$

(*) $\Rightarrow A$ и B су ограничени линеарни функционали који се поклапају на фундаменталном скупу $\Rightarrow$ поклапају се на читавом простору $C[0,1]$, тј. $A=B$.

Коначно, за $f \in C[0,1]$ важи

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1-x_k) \sum_{n=0}^{\infty} x_k^n f(x_k^n) = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k(f) = A(f) = \int_0^1 f(t) dt$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n f(x^n) = \int_0^1 f(t) dt$$

(2) Нека је за све $n \in \mathbb{N}$ дефинисано $A_n: C[0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ са $A_n(f) = n \cdot \int_0^1 x^n f(x) dx$.

Израчунајте $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(f)$.

$$|A_n(f)| = n \cdot \left| \int_0^1 x^n f(x) dx \right| \leq n \cdot \int_0^1 x^n |f(x)| dx \leq \|f\|_{\infty} \cdot n \cdot \int_0^1 x^n dx = \|f\|_{\infty} \cdot \frac{n}{n+1} \stackrel{(*)}{\leq} \|f\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow A_n \in \mathcal{B}(C[0,1], \mathbb{C}), \quad \|A_n\| \leq 1 \quad \text{за све } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$$

Нека је $f_k(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$A_n(f_k) = n \cdot \int_0^1 x^n \cdot x^k dx = n \cdot \int_0^1 x^{n+k} dx = \frac{n}{n+k+1}$$

$$\leadsto \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(f_k) = 1 \quad (= f_k(1))$$

Т.Б-Ш

$$\Rightarrow (\forall f \in C[0,1]) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(f) =: A(f)$$

Уочимо $B: C[0,1] \rightarrow \mathbb{C}$, $B(f) = f(1)$

Јаво се види $B \in \mathcal{B}(C[0,1], \mathbb{C})$ + $A=B$ на фундаменталном скупу

$$\Rightarrow (\forall f \in C[0,1]) \quad A(f) = B(f)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(f) = f(1)$$

③. Определить значение параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ т.д. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{4n} x_k \cdot \sqrt{4n-k}$ существует для каждого

$x = (x_k)_k \in \mathbb{C}^1$ и в том случае, определить граничное значение.

$(\forall n \in \mathbb{N}) A_n: \mathbb{C}^{(0;1]} \rightarrow \mathbb{C}$

$$A_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{4n} x_k \sqrt{4n-k}$$

$(\forall n \in \mathbb{N}) A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^1, \mathbb{C})$:

$$|A_n(x)| = \frac{1}{n^\alpha} \left| \sum_{k=1}^{4n} x_k \cdot \sqrt{4n-k} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{4n} |x_k| \cdot \sqrt{4n-k} \leq \frac{\sqrt{4n-1}}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{4n} |x_k| \leq \frac{\sqrt{4n-1}}{n^\alpha} \|x\|_1$$

$$\Rightarrow A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}), \|A_n\| \leq \frac{\sqrt{4n-1}}{n^\alpha}$$

$$\text{Важно } \|A_n\| = \frac{\sqrt{4n-1}}{n^\alpha} : \|A_n\| \geq |A_n(e_1)| = \frac{\sqrt{4n-1}}{n^\alpha} = \frac{\sqrt{4n-1}}{\sqrt{n} \cdot n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$$

1° $\alpha \in (-\infty, \frac{1}{2})$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| = +\infty \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| = +\infty \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{C}^1) \sup_{n \in \mathbb{N}} |A_n(x)| = +\infty$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x)$$

(да существует только если $\sup_{n \in \mathbb{N}} |A_n(x)| < +\infty$)

2° $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\|A_n\| = \frac{\sqrt{4n-1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{4 - \frac{1}{n}} \leq \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$$

Фундаментальный скуп $y \in \mathbb{C}^1$ $j = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$!

$$A_n(e_k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{4n-k} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(e_k) = 2$$

Т.Б-Ш

$$\Rightarrow (\forall x \in \mathbb{C}^1) \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) =: A(x)$$

Если $j \in x \in \mathbb{C}^1$ произвольно, $x = (x_k)_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot e_k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{4n} x_k \cdot \sqrt{4n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = A(x) = A\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot e_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot \underbrace{A(e_k)}_{\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(e_k) = 2} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k, \text{ так } x \in \mathbb{C}^1.$$

3° $\alpha \in (\frac{1}{2}, +\infty)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| = 0$$

Если $j \in x \in \mathbb{C}^1$ произвольно:

$$0 \leq |A_n(x)| \leq \|A_n\| \cdot \|x\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |A_n(x)| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{4n} x_k \cdot \sqrt{4n-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) = 0$$

□

④ Нека је X Банахов простор, Y нормирани простор и $A_n \in \mathcal{B}(X, Y)$ за све $n \geq 1$.

Ако је $Ax := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ за свако $x \in X$ и $(x_n)_n$ низ у X т.д. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in X$, дока-
зати да је $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x_n = Aa$

Пре свега, приметимо да из чињенице да су сви A_n ограничени и да $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ за
све $x \in X$ можемо закључити две ствари (по $(\Rightarrow)$ у Т. Банаха-Штејнхауса који следи
из пр. 3, зато нам не
треба комплетност
Королариј)

$$(1) \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty \rightsquigarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| = M < +\infty$$

$$(2) A \in \mathcal{B}(X, Y), \|A\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|A_n\|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x_n = Aa \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n x_n - Aa\| = 0 \quad \|A_n(x_n - a)\|$$

$$0 \leq \|A_n x_n - Aa\| = \|A_n x_n - A_n a + A_n a - Aa\| \leq \|A_n x_n - A_n a\| + \|A_n a - Aa\|$$

$$\leq \|A_n\| \|x_n - a\| + \|A_n a - Aa\|$$

$$\leq M \|x_n - a\| \cdot \|A_n a - Aa\| \quad \begin{matrix} \downarrow_{n \rightarrow +\infty} & \downarrow_{n \rightarrow +\infty} \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n x_n - Aa\| = 0$$

□

⑤ Нека је $(x_n)_n \in \mathbb{C}$. Израчунајте $\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} n x_n t^n$.

Добра дефиниција: $(x_n)_n$ је конвергентан низ па је и ограничен, т.ј.
 $(\forall n \in \mathbb{N}) |x_n| \leq M$

$$\rightsquigarrow |n x_n t^n| \leq n t^n \cdot M, \text{ а } \sum_{n=0}^{\infty} n t^n < +\infty$$

$$t \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} n t^{n-1} = t \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \right)' = t \cdot \frac{1}{(1-t)^2}$$

По Хајнеовој Т. (на исти начин као у 1. задатку, дефиниција је исти

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-t_n)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} k x_k t_n^k$ за произвољан низ $(t_n)_n$ т.д. $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 < t_n < 1$ и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 1.$$

Дефинишимо: $A_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$A_n(x) = (1-t_n)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} k x_k t_n^k, \text{ за све } x = (x_k)_k \in \mathbb{C}$$

Већ смо показали да је A_n добро деф, очигледно је линеаран а приметимо да је и
ограничен, за све $n \in \mathbb{N}$:

$$|A_n(x)| = (1-t_n)^2 \left| \sum_{k=0}^{+\infty} k x_k t_n^k \right| \leq (1-t_n)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} k |x_k| t_n^k$$

$$\leq \|x\|_{\infty} (1-t_n)^2 \cdot \frac{t_n}{(1-t_n)^2} = t_n \cdot \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \text{ и } \|A_n\| \leq 1 \Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| \leq 1 < +\infty$$

ФУНДАМЕНТАЛНИ СКУП $y \in \mathbb{C} \cup \{e_m \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \{e_\infty\} \quad \nabla$
 $\uparrow (1, 1, \dots, 1, \dots)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n(e_m) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1-t_n)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} k(e_m)_k t_n^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1-t_n)^2 \cdot m \cdot t_n^m = 0$$

$\downarrow \begin{matrix} n \rightarrow +\infty \\ 0 \end{matrix}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n(e_\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1-t_n)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} k t_n^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1-t_n)^2 \cdot \frac{t_n}{(1-t_n)^2} = 1$$

Т.Е-Ш

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n x =: Ax \text{ за сас } x \in X \text{ и } A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$$

Узимо $B: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $B(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \in \mathcal{B}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ (раније смо видели)

$$+ A=B \text{ на фундаменталном скупу } \Rightarrow Ax = Bx \text{ за сас } x \in \mathbb{C}$$

$$\leadsto \lim_{n \rightarrow +\infty} (1-t_n)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} k x_k t_n^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$$

$$\parallel$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n x_n t^n$$

□

ЈОШ ВАЖНИХ ТЕОРЕМА:

Т. (БАНАХА О ХОМЕОМОРФИЗМУ) X, Y - Банахови, $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ и A је „1-1“ и „на“
 $\Rightarrow \exists A^{-1}: Y \rightarrow X$ оператор инверзан оператору A и важи $A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$

Т. (О ОТВОРЕНОМ ПРЕСЛИКАВАЊУ) X, Y - Банахови, $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ и „на“ ^{непрекидан инверз!}
 $\Rightarrow A$ је отворено (слика отвореног скупа је отворен скуп)

⑥ Нека је X Банахов простор у којем на норми $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Државати да су норми $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ еквивалентне ако $\exists M > 0$ т.д. $(\forall x \in X) \|x\|_1 \leq M \|x\|_2$

норми $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ су еквивалентне ако $(\exists m, M > 0) m \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M \|x\|_2$, за сас $x \in X$

Треба државати да $(\exists m > 0) (\forall x \in X) m \|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

Узимо $I: (X, \|\cdot\|_2) \rightarrow (X, \|\cdot\|_1)$, $I(x) = x$

$$\left. \begin{array}{l} * I \text{ је очигледно линеаран оператор} \\ * \|I x\|_1 = \|x\|_1 \leq M \|x\|_2 \end{array} \right\} \Rightarrow I \in \mathcal{B}((X, \|\cdot\|_2), (X, \|\cdot\|_1))$$

Државати, I је очигледно „1-1“ и „на“

Т. БАНАХА О ХОМЕО

$$\Rightarrow \exists I^{-1}: (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2), I^{-1} \in \mathcal{B}((X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2))$$

Очигледно је $I^{-1}(x) = x$, а такође важи $\|I^{-1} x\|_2 \leq \|I^{-1}\| \cdot \|x\|_1$
 $\parallel$
 $\|x\|_2$

→ за третино и можемо узети $\frac{1}{\|x\|}$ (норма је 0 само за $x=0$ а у том случају третино тривијално важи)

СТАВ: (последница X^* -Банахове Т.) Нека је X нормирани простор, $x_0 \neq 0$ произвољан фиксиран елемент из X . Тада постоји $\underbrace{\text{линеарни функционал}}_{f_{x_0} \in B(X, \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C})}$ f_{x_0} на X т.д. $\|f_{x_0}\| = 1$ и $f_{x_0}(x_0) = \|x_0\|$.
 X^* - ДУАЛНИ ПРОСТОР

7. Нека је X нормирани простор. Показати да важи: $\|a\| = \sup_{f \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|f(a)|}{\|f\|}$, за сва $a \in X$.

Можемо пр. $a \neq 0$ ($a = 0 \Rightarrow \|a\| = 0$ и $f(0) = 0$ за сва $f \in X^*$)

Нека је $f \in X^* \setminus \{0\}$ произвољно $\Rightarrow \|f\| > 0$

$$\frac{|f(a)|}{\|f\|} \leq \frac{\|f\| \cdot \|a\|}{\|f\|} = \|a\| \Rightarrow \sup_{f \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|f(a)|}{\|f\|} \leq \|a\|$$

Проста је да докажемо још једну неједнакост, т.ј. $\|a\| \leq \sup_{f \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|f(a)|}{\|f\|}$.

Претходни став $\Rightarrow (\exists f_0 \in X^*) f_0(a) = \|a\|$ и $\|f_0\| = 1$

$$\sup_{f \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|f(a)|}{\|f\|} \geq \frac{|f_0(a)|}{\|f_0\|} = \frac{\|a\|}{1} = \|a\|$$

$$\Rightarrow \|a\| = \sup_{f \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|f(a)|}{\|f\|}$$

8. Нека су $X \neq \{0\}$ и Y нормирани простори т.д. је $B(X, Y)$ Банахов. Доказати да је тада Y Банахов простор.

Подсетимо се: X нвп, Y Банахов $\Rightarrow B(X, Y)$ Банахов.

$X \neq \{0\} \Rightarrow \exists x_0 \in X$ т.д. $\|x_0\| = 1$ (за произвољно $x \neq 0 \rightarrow \frac{x}{\|x\|} \in X$ је један такав)

Претходни став $\Rightarrow \exists f \in B(X, \mathbb{C})$ $\|f\| = 1$ и $f(x_0) = \|x_0\| = 1$

Нека је (y_n) произвољан Кошијев низ у Y и докажимо да он конвергира.

За $n \in \mathbb{N}$ дефинишимо операторе $A_n: X \rightarrow Y$, $A_n(x) = f(x) \cdot y_n$

$A_n \in B(X, Y)$:

1° линеарност и (очигледно из линеарности функционала f)

$$2^\circ \|A_n(x)\|_Y = \|f(x) \cdot y_n\|_Y = \|y_n\|_Y \cdot |f(x)| \leq \|y_n\|_Y \cdot \underbrace{\|f\|}_{=1} \cdot \|x\|_X$$

$$\Rightarrow A_n \in \mathcal{B}(X, Y) \text{ и } \|A_n\| \leq \|y_n\|, \text{ за све } n \in \mathbb{N}$$

Поне, приметимо да је низ $(A_n)_n$ Кошијев низ у $\mathcal{B}(X, Y)$.

$$\|(A_n - A_m)(x)\| = \|A_n(x) - A_m(x)\| = \|f(x)y_n - f(x)y_m\| \leq \|f\| \|y_n - y_m\| \|x\|$$

$$\Rightarrow \|A_n - A_m\| \leq \|y_n - y_m\| + (y_n)_n \text{ је Кошијев у } Y$$

$$\Rightarrow (A_n)_n \text{ Кошијев у } \mathcal{B}(X, Y)$$

$\mathcal{B}(X, Y)$ Банахов

$$\Rightarrow (A_n)_n \text{ конвергира, тј. } \exists A \in \mathcal{B}(X, Y)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n - A\| = 0$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n - A\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A)(x)\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|x\|=1} \|(A_n - A)(x)\|$$

$$\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(A_n - A)(x_0)\| \quad (\|x_0\|=1)$$

$$\geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f(x_0)y_n - A(x_0)\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n - A(x_0)\| \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n - A(x_0)\| = 0 \quad (0 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|y_n - A(x_0)\| \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|y_n - A(x_0)\| \leq 0)$$

$$\Rightarrow (y_n)_n \text{ конвергира ка } A(x_0) \in Y$$

$$\Rightarrow Y \text{ је Банахов простор}$$

□

Последица: Y нвп који није Банахов $\Rightarrow \mathcal{B}(\Phi, Y)$ није Банахов.

Ово смо могли и директно да докажемо, врло слично као у претходном задатку.

Y није Банахов $\Rightarrow \exists$ Кошијев $(y_n)_n$ у Y који не конвергира

За $n \in \mathbb{N}$ дефинишимо $A_n: \Phi \rightarrow Y$, $A_n(z) = z \cdot y_n$

$$\|A_n(z)\| = \|z \cdot y_n\| = |z| \cdot \|y_n\| \quad A_n \text{ је линеаран} \Rightarrow A_n \in \mathcal{B}(\Phi, Y), \|A_n\| = \|y_n\|$$

за све $z \in \Phi$!

$$\leadsto \|A_n - A_m\| = \|y_n - y_m\| \Rightarrow (A_n)_n \text{ је Кошијев у } \mathcal{B}(\Phi, Y) \text{ (као у претходном задатку).}$$

$$\text{Пн. да } \exists A \in \mathcal{B}(\Phi, Y) \text{ т.д. } A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A, \text{ тј. } \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|z|=1} \|A_n(z) - A(z)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|z|=1} \|z \cdot y_n - A(z)\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|z|=1} \|z \cdot (y_n - A(\cdot))\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|z|=1} |z| \cdot \|y_n - A(\cdot)\|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - A(\cdot)\|$$

$$\Rightarrow y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A(\cdot) \quad \text{⚡}$$

$$\Rightarrow (A_n)_n \text{ је Кошијев низ у } \mathcal{B}(\Phi, Y) \text{ који не конвергира}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}(\Phi, Y) \text{ није Банахов простор.}$$

□

прф: Скуп $G_A = \{(x, Ax) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ се назива графиком оператора A .

Т. (О ЗАТВОРЕНОМ ГРАФИКУ) X, Y Банахови простори, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $G_A = \overline{G_A}$
(график оператора A је затворен скуп) $\Rightarrow A \in \mathcal{B}(X, Y)$.

9. Нека су X, Y Банахови простори и $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ т.д. је $f \circ T \in X^*$ за свако $f \in Y^*$. Доказати да је тада $T \in \mathcal{B}(X, Y)$

ИДЕЈА: Применићемо Т. о затвореном графику.

$G_T \subset X \times Y$ затворен $\Leftrightarrow \forall \text{ низ } (x_n, Tx_n) \in G_T$ т.д. $(x_n, Tx_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x, y)$

важи $y = Tx$, т.ј. $(x, y) \in G_T$

$$(x_n, Tx_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x, y) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - x\|_X = 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|Tx_n - y\|_Y = 0$$

Покажимо $y = Tx$.

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \|Tx_n - y\|_Y < \varepsilon$

$$\|Tx_n - y\|_Y \stackrel{(*)}{=} \sup_{\|f\|=1} |f(Tx_n - y)| = \sup_{\|f\|=1} |f \circ T(x_n) - f(y)|$$

$$\leadsto |f \circ T(x_n) - f(y)| < \varepsilon \text{ за све } f \in Y^* \text{ т.д. } \|f\|=1 \text{ и све } n \geq n_0$$

$$+ \lim_{n \rightarrow +\infty} f \circ T(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f \circ T(x) \quad (f \circ T \in X^*!)$$

$$\Rightarrow |f \circ T(x) - f(y)| \leq \varepsilon \text{ за све } f \in Y^*, \|f\|=1$$

$$\|Tx - y\|_Y = \sup_{\|f\|=1} \|f(Tx - y)\| = \sup_{\|f\|=1} \|f \circ T(x) - f(y)\| \leq \varepsilon \quad / \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+}$$

$$\Rightarrow \|Tx - y\|_Y = 0, \text{ т.ј. } Tx = y.$$

□