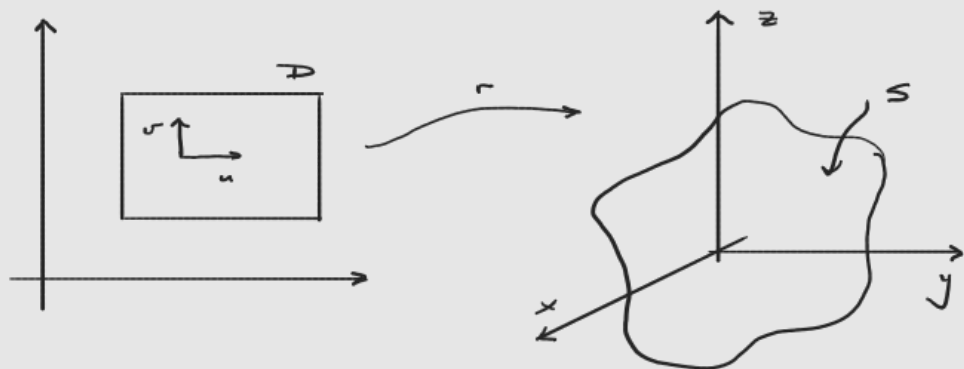


* ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛИ I ВРСТЕ



* $S: r(u, v)$ је површ у $\mathbb{R}^3$!

* параметризација површи:

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \|r'_u \times r'_v\| du dv$$

$f=1 \leadsto$ површина од S

* Специјално: $S: z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, тј. параметризација површи S

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z(x, y) \end{cases}$$

$$x = x$$

$$y = y$$

$$z = z(x, y)$$

$$\leadsto r(x, y) = (x, y, z(x, y))$$

$$r'_x = (1, 0, z'_x)$$

$$r'_y = (0, 1, z'_y)$$

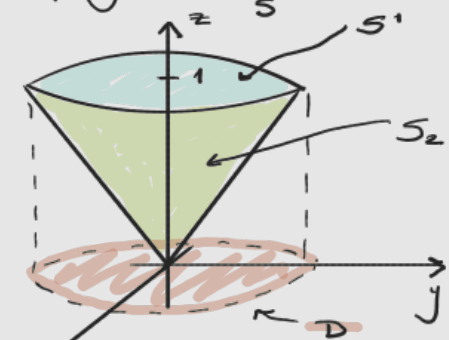
$$\leadsto r'_x \times r'_y = (-z'_x, -z'_y, 1)$$

$$\Rightarrow \|r'_x \times r'_y\| = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$$

$$\leadsto \iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \cdot \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$$

① Израчунајти $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, $S = \partial T$ (граница (пуло) тела T),

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$$



S - купола!

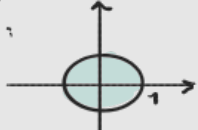
$$\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2}$$

дн

омота

$$S_1: z = 1, x^2 + y^2 \leq 1,$$

$$\text{тј. } (x, y) \in D:$$



$$\leadsto \iint_{S_1} (x^2 + y^2) dS = \iint_D (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{1 + 0^2 + 0^2} dx dy$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \left\{ \text{поларне...} \right\} = \frac{\pi}{2}$$

$$S_2: z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (x, y) \in D$$

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

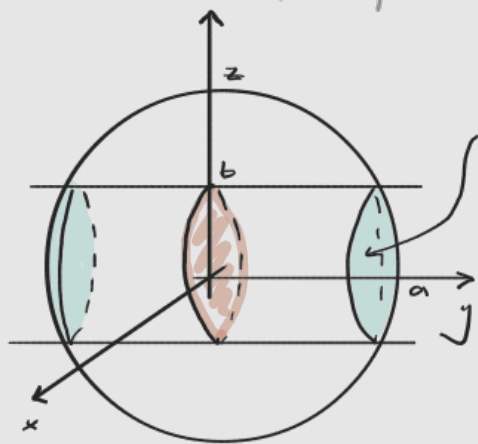
$$\leadsto \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \iint_{S_2} (x^2 + y^2) dS = \iint_D (x^2 + y^2) \cdot \sqrt{2} dx dy = \frac{\pi \sqrt{2}}{2}$$

$$\leadsto \iint_S (x^2 + y^2) dS = \frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{2})$$

□

- ② Нeka je дата сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Израчунаати површину дела сфере унутар $\underbrace{x^2 + z^2 = b^2}_{\text{цилиндар по } y\text{-оси!}}$, $0 < b < a$.



$$P(S) = 2 \cdot P(S_1)!$$

S_1 Параметризујемо S_1 :

D ќе биде проекција на равнин O_{xz}

$$D: x^2 + z^2 = b^2$$

Још треба изразити y као функцију од x и z :

$$y^2 = a^2 - x^2 - z^2 \leadsto y = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}$$

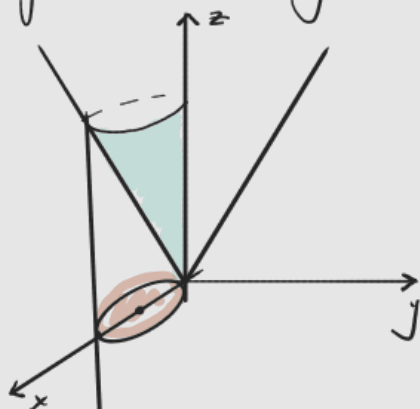
$$y'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}} \quad y'_z = \frac{-z}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}$$

$$P(S) = 2 \cdot \iint_{S_1} dS = 2 \cdot \iint_D \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz$$

$$= 2 \cdot \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - (x^2 + z^2)}} dx dz = \text{пешаре ...}$$

□

- ③ Израчунаати $\iint_S (xy + yz + zx) dS$ по површи S , где S е катет $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ кој се наоѓа у цилиндру $x^2 + y^2 = 2ax$, $a > 0$.



$$x^2 - 2ax + y^2 = 0$$

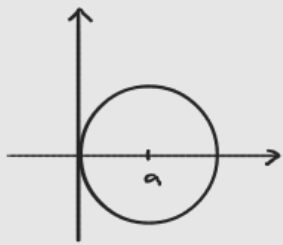
$$(x-a)^2 + y^2 = a^2$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + y^2 \leq a^2\}$$

$$x, y - \text{параметри, } z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\iint_S (xy + yz + zx) dS = \iint_D (xy + (y+x)\sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \sqrt{2} dx dy = I$$

ПОЛАРНЕ КООРД:



$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta, \quad J = r$$

$$0 \leq r \leq a$$

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = 2ar \cos \theta \longrightarrow r = 2a \cos \theta$$

$$\rightsquigarrow 0 \leq r \leq 2a \cos \theta$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

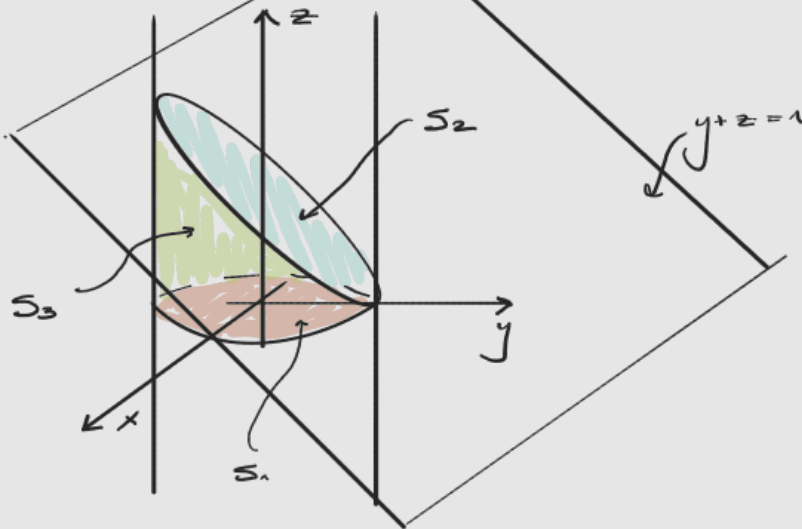
$$\frac{\pi}{2} \quad 2a \cos \theta$$

$$I = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a \cos \theta} (r^2 \cos \theta \sin \theta + r^2 (\sin \theta + \cos \theta)) \cdot r dr d\theta$$

$$= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta \sin \theta + \sin \theta + \cos \theta) \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2a \cos \theta} d\theta = \dots = \frac{64}{15} \sqrt{2} a^4$$

□

4. Наћи површину тела T ограниченог површинама $\underbrace{x^2 + y^2 = 1}_{\text{цилиндр}}, \underbrace{y + z = 1, z = 0}_{\text{равни}}$



$$P(T) = P(S_1) + P(S_2) + P(S_3)$$

$$P(S_1) = \pi \quad (\text{круг полупр. 1})$$

параметризујемо S_2 : D ће бити пројекција на равни Oyz

Приметимо: пројекција није инјективна!

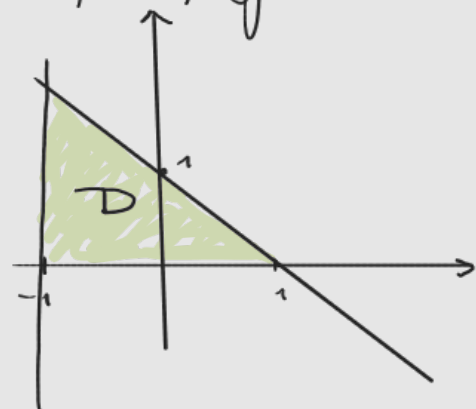
$\rightsquigarrow P(S_2) = 2P(S_2')$, ако је S_2' део површи на ком је x позитивно

$$S_2' = S_2 \cap \{x \geq 0\}$$

парамет: $x = \sqrt{1 - y^2}, (y, z) \in D$

$$x'_z = 0, \quad x'_y = \frac{-y}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$P(S_2') = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy dz = \int_{-1}^1 \int_0^{1-y} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy dz = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \cdot (1 - y) dy$$



$$= \underbrace{\int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}}_{\text{arcsiny} \Big|_{-1}^1 = \pi} - \int_{-1}^1 \underbrace{\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy}_{\text{смена: } t = 1-y^2} = \dots$$

Пресекаје још на параметризујемо S_3 :

$$z = 1-y \quad \rightsquigarrow \quad P(S_3) = \iint_{S_3} dS = \sqrt{2} \cdot P(S_1) = \sqrt{2} \pi$$

$$(x, y) \in D_1 = S_1$$

□

* ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛИ II ВРСТЕ

$$\vec{F} = (P, Q, R)$$

$$F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad P, Q, R: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

S -површ чија је параметриза-
ција:
 $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$
 $(u, v) \in D$

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy = \iint_D \langle (P, Q, R), \vec{n}_S \rangle du dv$$

вектор нормале
на површ S

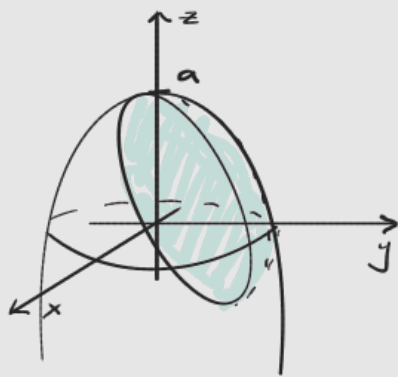
$$(\vec{n}_S = (f(u, v), g(u, v), h(u, v)))$$

$$= r'_u \times r'_v$$

* Специјално: $z = z(x, y), (x, y) \in D \rightsquigarrow \vec{n}_S = (-z'_x, -z'_y, 1)$
(као раније)

① Нека је дата површ $S: \overbrace{z = a - x^2 - y^2}^{\text{обрнути параболоид}}, a > 0$ и $\alpha: \overbrace{2x + 2y + z = a}^{\text{раван}}$ и
нека је S_1 доња страна од S коју одсеца дата равна. Наћи:

$$\iint_{S_1} y dy dz - x dx dz + (a - z)^{\frac{3}{2}} dx dy$$



$$\alpha: 2x + 2y + z = a \rightsquigarrow \vec{n}_\alpha = (2, 2, 1)$$

пресек са координатним осима: $z = a$ ($x = y = 0$)

$$y = \frac{a}{2} \quad (x = z = 0)$$

$$x = \frac{a}{2} \quad (y = z = 0)$$



Овако изгледа S_1 и ово је смер нормале коју нам треба

D!

Нађимо пројекцију S_1 на Oxy равни:

$$2x + 2y + a - x^2 - y^2 = a \rightsquigarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$z \text{ је функција од } x \text{ и } y \rightsquigarrow \vec{n}_S = (-z'_x, -z'_y, 1) = (2x, 2y, 1)$$

да ли је ово добра нормала или нам треба супротна?

Како одговарамо на ово питање?

Израчунамо скаларни производ $\vec{n}_S$ са $(0, 0, 1)$: Ако добијемо $\cos \varphi > 0 \Rightarrow \varphi$ је оштар $\rightsquigarrow \vec{n}_S$ је супротно усмерен

од онога што нам треба у овом задатку.

$$\varphi \text{ је туп } \Leftrightarrow \cos \varphi < 0, \quad \cos \varphi = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$$



$$\langle \vec{n}_S, (0, 0, 1) \rangle = 1 > 0 \rightsquigarrow \text{треба нам } -\vec{n}_S, \text{ тј. } (-2x, -2y, -1)$$

$$\iint_D \langle (y, -x, (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}), (-2x, -2y, -1) \rangle dx dy = - \iint_D (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy = \dots$$

□

② Израчунаати $I = \iint_S x dy dz + y dz dx + z dx dy$, S - спољашња страна сфере

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad a > 0.$$

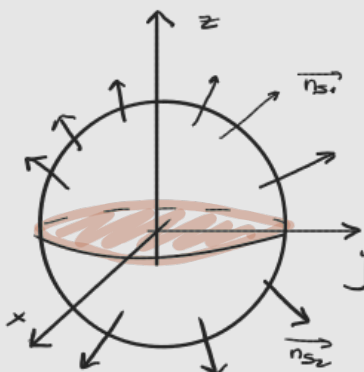
$$I = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} \quad (\text{делимо на 2 дела, по } z \text{ оси})$$

$$S_1: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D$$

$$\vec{n}_{S_1} = \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right)$$

$$S_2: z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$\vec{n}_{S_2} = \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, -1 \right)$$



II Начин: преко

сферичних коорд.

Па или ј ово одг. вектори нормала?

$$\langle \vec{n}_{S_1}, (0,0,1) \rangle = 1 > 0 \leadsto \varphi < \frac{\pi}{2}$$

$$\langle \vec{n}_{S_2}, (0,0,1) \rangle = 1 > 0 \times \leadsto \text{треба нам } -\vec{n}_{S_2}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, -1 \right)$$

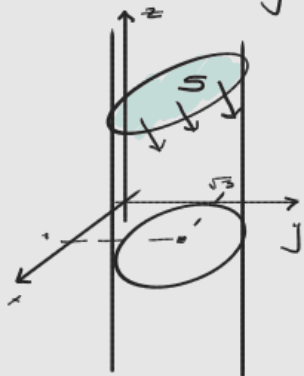
$$\rightarrow I = 2 \iint_D \left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} + \sqrt{a^2-x^2-y^2} \right) dx dy = \dots = 4a^3\pi$$

□

③ $S_1: z = xy$, $S_2: x^2+y^2 = 2x+2y\sqrt{3}-3$. Наћи $\iint_S xz dy dz - yz dz dx + \frac{xy+1}{z+1} dx dy$, где је S једна страна две површи S_1 и S_2 .

$$S_2: x^2-2x+1-1+y^2-2y\sqrt{3}+3=0$$

$$(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=1 \leadsto \text{цилиндар}$$



$$D - \text{проекција на } O_{xy}: D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=1\}$$

$$z = xy \text{ унутар } S_2, \text{ а ту је } xy \geq 0 \Rightarrow z \geq 0$$

$$\text{параметризација: } z = xy, (x,y) \in D$$

$$z'_x = y, z'_y = x$$

$$\leadsto \vec{n}_S = (-y, -x, 1)$$

0, а треба нам једна страна

$$\leadsto \text{треба узети } -\vec{n}_S = (y, x, -1)$$

$$I = \iint_D \langle (x^2y, -xy^2, \frac{xy+1}{xy+1}), (y, x, -1) \rangle dx dy = -\iint_D dx dy = -P(D) = -\pi$$

□

T: (ТАЈС - ОСТРОГРАДСКИ) Нека је тело $T \subseteq \mathbb{R}^3$ ограничено, део-по-део глатком површи

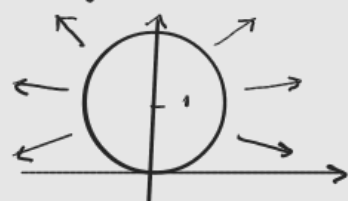
S позитивно оријент. (нормала показује ка споља) и $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$

дефинисане и непрекинуте на $\overline{T}$. Тада важи:

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_T (P'_x + Q'_y + R'_z) dx dy dz$$

④ Израчунати $\iint_S (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} (x dy dz + y dz dx + z dx dy)$, где је S спољашња страна површи $x^2+y^2+z=2z$.

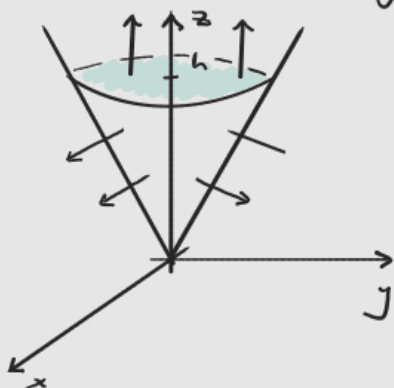
$$x^2+y^2+z=2z \leadsto x^2+y^2+(z-1)^2=1$$



$$\begin{aligned}
 P &: x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} & \rightsquigarrow \frac{\partial P}{\partial x} &= (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} + 3x^2 \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
 Q &: y(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} & &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} (4x^2+y^2+z^2) \\
 R &: z(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} & \frac{\partial Q}{\partial y} &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} (x^2+4y^2+z^2) \\
 & & \frac{\partial R}{\partial z} &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} (x^2+y^2+4z^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_T \sqrt{x^2+y^2+z^2} (6x^2+6y^2+6z^2) dx dy dz = 6 \iiint_T (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} dx dy dz \\
 &= \left\{ \text{сферне координате...} \right\} = \frac{128\pi}{7}
 \end{aligned}$$

⑤ Израчунати $\iint x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, ако је S позитивно оријент. страна површи $S: z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq h$



I начин: параметризација...

II начин: Гаус-Остроградски

Па бисмо могли да применимо Т, неопходно је да зато тело затворимо - додамо „поклопец“ или тако да остане позитивна оријентација

$$B: z = h, (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq h^2\}$$

$$\iint_{S \cup B} \Gamma = 0 = \iiint_T (2x + 2y + 2z) dx dy dz = 2 \iiint_T (x + y + z) dx dy dz$$

„

$$\iint_S + \iint_B \Rightarrow \iint_S = 2 \iiint_T - \iint_B$$

$\vec{n}_B = (0, 0, 1)$ - вектор нормале који показује ка слобџ

$$\iint_B = \iint_D \langle (x^2, y^2, h^2), (0, 0, 1) \rangle dx dy = h^2 \iint_D dx dy = h^4 \pi$$

$$\iiint_T (x+y+z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_0^h (x+y+z) dz \right) dx dy = \dots = \pi \frac{h^4}{4} \quad \text{Коначно: } \iint_S = 2\pi \frac{h^4}{4} - h^4 \pi = -\frac{h^4 \pi}{2}$$