

* ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$A \ni x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

МЕТРИЧКИ
ПРОСТОР

$$f: A \longrightarrow (\mathbb{R}, d_r), \quad A \subseteq (X, d_x)$$

ИЗОП: Нека је $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$; тада дефинишемо ЛИМИС:

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, \dots, x_n) = b \iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \in A) (0 < d_x(x, a) < \delta) \Rightarrow d_r(f(x), b) < \varepsilon$$

* специјално: на $\mathbb{R} - d(x, y) = |x - y|$

ОВАКВУ ФУНКЦИЈУ
ЗОВЕМО МЕТРИКА НА X

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ функција}$$

$T, D, \dots$ ВАЖИ:

$$(1) (\forall x, y \in X) d(x, y) \geq 0$$

$$d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(2) (\forall x, y \in X) d(x, y) = d(y, x)$$

$$(3) (\forall x, y, z \in X)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Специјално: $A \subseteq \mathbb{R}^2, f: A \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = b \iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall (x, y) \in A) (0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta) \Rightarrow |f(x, y) - b| < \varepsilon$$

$d((x, y), (x_0, y_0))$ - метрика на $\mathbb{R}^2$

* ХАЈНСОВА Т ($\gamma \mathbb{R}^2$): $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = b \iff \forall$ низ $\{(x_n, y_n)\}_n$ т.д. $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$

ВАЖИ: (ако) $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x_0, y_0)$ онда

$$f(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b.$$

Најчешће је корисно када желимо да докажемо да неки лимес не постоји; нпр. по два различита низа добијемо различите граничне вредности.

① Нека је $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$. Израчунати поновљене лимесе $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ и $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$.

Показати да не постоји двојни лимес $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$.

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

овде x третирамо
као константу!

$$\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

y третирамо као константу!

По бисмо показали да не постоји двојни лимес, довољно је наћи 2 низа т.д. $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$

или f на тим низовима тежи различитим вредностима, тј:

$$(x_n', y_n') \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0), \quad \text{а} \quad f(x_n', y_n') \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b_1$$

и $b_1 \neq b_2$

$$(x_n'', y_n'') \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0), \quad \text{а} \quad f(x_n'', y_n'') \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b_2$$

Нека је $(x_n', y_n') = (\frac{1}{n}, 0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0, 0)$ и $(x_n'', y_n'') = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$f(x_n', y_n') = \frac{0}{\frac{1}{n^2}} = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$f(x_n'', y_n'') = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

ХАЈНЕ

$\Rightarrow$ не постоји $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

□

② Нека је $f(x,y) = \begin{cases} x + y \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. Показати да постоје $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$ и

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$, а да не постоји $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} (x + y \sin \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + y \sin \frac{1}{x}) = ?$

Честа идеја: ограничимо $f(x,y)$ (поварљиво је по апсолутној вредности):

$$0 \leq |x + y \sin \frac{1}{x}| \leq |x| + |y| \cdot \underbrace{|\sin \frac{1}{x}|}_{\leq 1} \leq |x| + |y|$$

$\xrightarrow{\text{Т=2 полиција}} 0 \quad (x,y) \rightarrow (0,0)$

$+ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0!$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} (x + y \sin \frac{1}{x})$ - овај лимес неће постојати јер не постоји $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$:

Искористимо Хајнсову Т - $x_n' = \frac{1}{2n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ $\sin \frac{1}{x_n'} = \sin(2n\pi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 $x_n'' = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ $\sin \frac{1}{x_n''} = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$
 $0 \neq 1!$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \nexists \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$

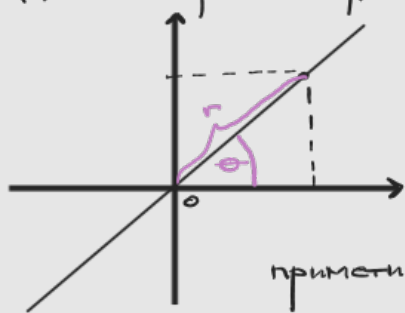
□

③ Показати да $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ постоји по сваком правцу кроз $(0,0)$, али не постоји као двострани лимес.

Шта значи постоји по сваком правцу кроз $(0,0)$?

Генерално, (x,y) могу на произвољан начин да прилазе тачки $(0,0)$, тек се у овом случају, специјално, x и y крећу по произвољној правој кроз $(0,0)$

Уводимо поларне координате:



$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

приметимо: $(x,y) \rightarrow (0,0)$ по некој правој кроз $(0,0)$

$$\begin{aligned} (r \cos \theta, r \sin \theta) &\rightarrow (0,0) \text{ за фиксирани } \theta \\ \Downarrow \\ r &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta \text{ - фиксирано}}} \frac{r^4 \cos^3 \theta \sin \theta}{r^6 \cos^6 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^3 \theta \sin \theta}{r^4 \cos^6 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{0}{0 + \sin^2 \theta} = 0$$

$\because \sin^2 \theta \neq 0!$
тј. $\sin \theta \neq 0$

Ако је $\sin \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta \neq 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\overbrace{r^4 \cos^3 \theta \sin \theta}^0}{\underbrace{r^6 \cos^6 \theta + r^2 \sin^2 \theta}_0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{0}{r^6 \cos^6 \theta} = \lim_{r \rightarrow 0} 0 = 0$$

Међутим, $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}!$

Бих смо израчунали да је лимес по свим правима 0, па је довољно наћи неку криву по којој није 0: нпр. $y = x^3$

$$f(x,y) = f(x,x^3) = \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \neq 0$$

Могли смо и да искористимо Хајнеову Т:

$$\left. \begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n} \\ y_n &= \frac{1}{n^3} \end{aligned} \right\} \text{ исти закључак као раније!}$$

не може $y_n = \frac{1}{n}$ јер у онда (x_n, y_n) на правој $y = x$!

④. Наћи $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$.

Уозмимо низ $(x_n, y_n) = (n, n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

$$f(x_n, y_n) = \frac{2n}{n^2 - n^2 + n^2} = \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow 0 \text{ је кандидат за тражени лим!}$$

Покажимо $f(x,y) \rightarrow 0$:

$$0 \leq \left| \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \right| \stackrel{\text{јер } x,y \rightarrow +\infty}{=} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \leq \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \xrightarrow[y \rightarrow +\infty]{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$x^2-xy+y^2 = (x-y)^2 + xy \geq 0 \quad \text{и} \quad (x-y)^2 + xy \geq xy$$

Т. о 2 полинома $\Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{xy}{x^2-xy+y^2} = 0$

5. Наћи $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} \frac{\sin(xy)}{x}$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} y = 1 \cdot a = a$$

6. Наћи $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \underbrace{(x+y)e^{-x^2-y^2}}_{f(x,y)}$.

Проверимо шта се дешава за $(x_n, y_n) = (n, n)$:

$$f(x_n, y_n) = 2n \cdot e^{-2n^2} = \frac{2n}{e^{2n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \left(\frac{\text{полином}}{\text{експ. ф-ја}} \right)$$

Покушајмо да ограничимо $f(x,y)$:

$$0 \leq |(x+y)e^{-x^2-y^2}| \stackrel{\text{јер } x,y > 0}{=} (x+y)e^{-x^2-y^2} \leq (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2} \stackrel{t=x^2+y^2}{=} t \cdot e^{-t} = \frac{t}{e^t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} f(x,y) = 0$$

деф. Функција $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ је непрекидна у тачки $a = (a_1, a_2) \in A$ ако је

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} f(x,y) = f(a_1, a_2)$$

7. Нека је $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$. Показати да је f непрекидна по свакој пром. поседно, али није непрекидна на $\mathbb{R}^2$.

← фиксирамо једну променљиву и гледамо f као функцију једне променљиве

f је симетрична по x и y , па је довољно да фиксирамо y и посматрамо f као функцију по x , а обрнуто ће бити аналогно.

Нека је $y = y_0$ фиксирано

$$g(x) := f(x, y_0) = \begin{cases} \frac{2xy_0}{x^2+y_0^2}, & y_0 \neq 0 \\ 0, & y_0 = 0 \end{cases}$$

g је очигледно непр. за $y_0 \neq 0$ (непр. / непр.)

$y_0 = 0 \Rightarrow g(x) \equiv 0$ што је такође непрекидна ф-ја

* Такође, приметимо да је f непрекидна на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, такође као количник непрекидних.

Да ли је $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$?

приметимо: за $x=y \neq 0 \rightarrow f(x,x) = 1$

$$\rightsquigarrow (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow f(x_n, y_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0$$

$$\downarrow n \rightarrow +\infty$$

$$(0,0) \Rightarrow f \text{ није непр. у } (0,0)!$$

□

НАПОМЕНА: Шта радимо ако имамо функцију $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$?

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

f је непрекидна у $x \in \mathbb{R}^n$ ако $(\forall i) f_i$ непрекидна у x

$$f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ своди се на претходно!

⑧ Нека је $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Доказати да је f непрекидна по сваком правцу кроз $(0,0)$, али није непрекидна на $\mathbb{R}^2$.

I начин: преко поларних координата као у задатку ③.

II начин: свака права кроз $(0,0)$ је облика $y=kx$, $k \in \mathbb{R}$ или $x=0$ - Oy -ова

(1) За $y=kx$ сада имамо функцију једне променљиве:

$$g(x) = f(x, kx) = \begin{cases} \frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{kx}{x^2+k^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

g је свакако непрекидна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; Да ли је $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) = 0$?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{x^2+k^2} = \begin{cases} \frac{0}{0+k^2} = 0, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases} \text{ (прво убацити } k \text{ па пуштамо } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0)$$

(2) $x=0 \rightsquigarrow f(0,y) \equiv 0$ што је свакако непр. функција

$\Rightarrow f$ је непрекидна по сваком правцу

* Да ли је f непрекидна на $\mathbb{R}^2$?

Тј. да ли је $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$?

КИЖЕ: $y = x^2 \rightsquigarrow f(x, x^2) = \frac{1}{2} \quad \text{за } x \neq 0$
 $\downarrow$
 $0 \quad x \rightarrow 0$

□