

Def: Если $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ открыт и $a \in A$. В точке $a \in A$ скажем, что f —

(1) **локальный минимум** функции f эк. если: $(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in B(a, \varepsilon)) f(x) \geq f(a)$ — минимум у него!
 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \varepsilon\}$

(2) **строгий локальный минимум** функции f эк. если: $(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) f(x) > f(a)$

(3) **локальный максимум** функции f эк. если: $(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in B(a, \varepsilon)) f(x) \leq f(a)$

(4) **строгий локальный максимум** функции f эк. если: $(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in B(a, \varepsilon) \setminus \{a\}) f(x) < f(a)$

(5) **стационарная точка** функции f эк. если $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ для $i = \overline{1, n}$.

Важно: a — экстремум $\Rightarrow a$ — стационарная точка (т.к. кандидат на экстремум — стационарная точка!)

* КВАДРАТНЫЕ ФОРМЫ

* матрица $\tilde{\Phi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ задает квадратичную форму, т.е. реальную функцию n -переменных следующего вида:

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = X^T \tilde{\Phi} X, \quad \text{где } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ (= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j)$$

Def: (1) Квадратная форма Φ — **положительно (семи)определенная** эк. если $\Phi(x_1, \dots, x_n) (\geq) > 0$ для всех $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (т.е. по определению > эк. для $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$!)

(2) Квадратная форма Φ — **отрицательно (семи)определенная** эк. если $\Phi(x_1, \dots, x_n) (\leq) < 0$ для всех $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (т.е. отрицательная определенность < эк. для $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$!)

(3) Квадратная форма Φ — **неопределенная** (неопределенная) эк. если существуют $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ т.д. $\Phi(x_1, \dots, x_n) > 0$ и $\Phi(y_1, \dots, y_n) < 0$

Пример: $\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1 - 2x_2)^2 + x_3^2$ — положительно определенная

$$(\Phi_1(x_1, x_2, x_3) > 0 \text{ для } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0))$$

$$\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3)^2 \text{ — положительно полуопределенная}$$

(может быть $\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = 0$ и для любых x_1, x_2, x_3 равных 0)

T: Нека је $A \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп, $a \in A$ и $f \in C^2(A)$ при чему је a стационарна тачка функције f ($df(a)=0$). Нека је Φ квадратна форма чија је матрица

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(a) \end{pmatrix} \quad \text{— ХЕСИЈАН функције } f$$

Тада важи:

- (1) ако је Φ позитивно дефинитна $\Rightarrow f$ има строги лок. минимум у a
- (2) ако је Φ негативнo дефинитна $\Rightarrow f$ има строги лок. максимум у a
- (3) ако је Φ променљивог знака $\Rightarrow f$ нема лок. екстремум у a

За испитивање дефинитности квадратне форме често користимо Силвестеров критеријум, познат као

Силвестеров критеријум:

Нека је $\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ матрица квадратне форме $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је

$$M_1 = a_{11}, M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \dots M_n = \det \tilde{\Phi} \quad \text{њени главни минори.}$$

Ако је $M_1 > 0, M_2 > 0 \dots M_n > 0 \Leftrightarrow \Phi$ је поз. дефинитна

Ако је $M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0$ итд. (наизменично мењају знак + $M_i < 0$) $\Leftrightarrow \Phi$ негативнo дефинитна.

① Одредити екстремне вредности функције $f(x,y) = 3xy - x^2 - y^3$ на њеном домену.

$D_f = \mathbb{R}^2$ — отворен и

Нађимо стационарне тачке функције f , (тј. кандидате за екстремуме)

$$\begin{cases} f'_x = 3y - 2x = 0 \\ f'_y = 3x - 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow x = x^4 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

$$\stackrel{\Downarrow}{y=0} \quad \stackrel{\Downarrow}{y=1}$$

Пак, имамо 2 кандидата: тачке $A(0,0)$ и $B(1,1)$

$$\begin{cases} f''_{xx} = -2 \\ f''_{xy} = 3 = f''_{yx} \\ f''_{yy} = -6y \end{cases} \Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$$

Специјално, у $\mathbb{R}^2$:

$$H_f(a) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(a) & f''_{xy}(a) \\ f''_{yx}(a) & f''_{yy}(a) \end{vmatrix}$$

$M_1 > 0, M_2 > 0 \Rightarrow a$ је лок. мин.

$M_1 < 0, M_2 > 0 \Rightarrow a$ је лок. макс.

$M_2 < 0 \Rightarrow a$ није екстремум

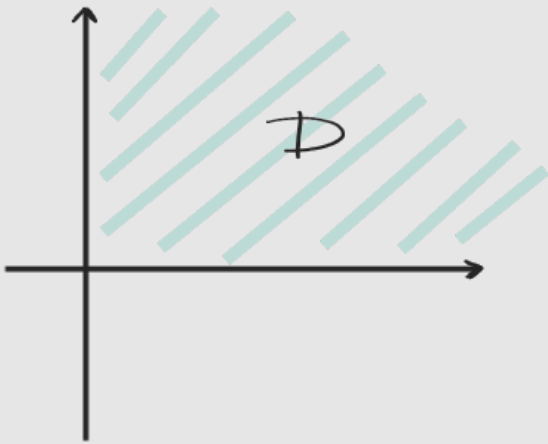
$$* A(0,0): H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} M_1 = 0 \\ M_2 = -9 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ nije tačka skrajnjima!}$$

$$* B(1,1): H_f(1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} M_1 = -6 < 0 \\ M_2 = 27 > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Сингестер} \\ \Rightarrow B \text{ je tačka лок. максимума!} \end{array}$$

$$\underline{f(1,1) = 3 - 1 - 1 = 1}$$

□

②. Опређити екстремне вредности функције $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ на скупу $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y > 0\}$



D је отворен скуп $\leadsto$ Можемо примењивати Сингестер-Бог критеријум

$$\left. \begin{array}{l} f'_x = y - \frac{50}{x^2} = 0 \\ f'_y = x - \frac{20}{y^2} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = \frac{50}{x^2} \\ x = \frac{20}{y^2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = x^4 \cdot \frac{20}{50^2}$$

$$\Leftrightarrow 125x = x^4$$

$$x(x^3 - \frac{125}{5^3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$$

↑

ове тачке

$$y = 2$$

ни су у D па их занемаримо!

Дакле, имамо само једног кандидата: $A(5,2)$

$$\left. \begin{array}{l} f''_{xx} = -\frac{100}{x^3} \\ f''_{xy} = 1 = f''_{yx} \\ f''_{yy} = -\frac{40}{y^3} \end{array} \right\} \Rightarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{100}{x^3} & 1 \\ 1 & -\frac{40}{y^3} \end{pmatrix}$$

$$H_f(5,2) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = -\frac{4}{5} > 0$$

$$M_2 = 4 - 1 = 3 > 0$$

$\left. \begin{array}{l} M_1 = -\frac{4}{5} > 0 \\ M_2 = 4 - 1 = 3 > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Сингестер} \\ \Rightarrow A(5,2) \text{ je лок. минимум } f \end{array}$

$$f(5,2) = 30$$

□

③. Опређити екстремне вредности функције $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$ на $\mathbb{R}^2$

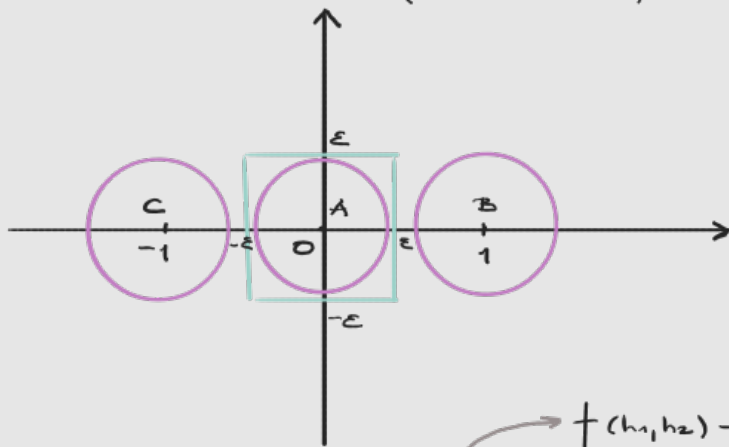
$\mathbb{R}^2$ је отворен и

$$\left. \begin{array}{l} f'_x = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \\ f'_y = 4y^3 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array} \leadsto \text{Послици смо 3 кандидата: } A(0,0), B(1,0) \text{ и } C(-1,0)$$

$$\left. \begin{aligned} f''_{xx} &= 12x^2 - 4 \\ f''_{xy} &= 0 = f''_{yx} \\ f''_{yy} &= 12y^2 \end{aligned} \right\} \rightsquigarrow H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$* A(0,0): H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -4 \\ M_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{не може Силвестер!}$$



Шта радимо у оваквим ситуацијама?
Посматрамо вредности функције у некој околини стационарне тачке.

Дакле, нека су $h_1, h_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ и

посматрајмо $f(h_1, h_2) - f(0,0)$:

$$\begin{aligned} f(h_1, h_2) - f(0,0) &= h_1^4 + h_2^4 - 2h_1^2h_2^2 \\ &= h_1^2(h_1^2 - 2) + h_2^4 \end{aligned}$$

(1) $h_1 = 0$ (правец y -осе):

$$f(h_1, h_2) - f(0,0) = h_2^4 \geq 0$$

$$\text{тј. } f(h_1, h_2) \geq f(0,0)$$

(2) $h_2 = 0$ (правец x -осе):

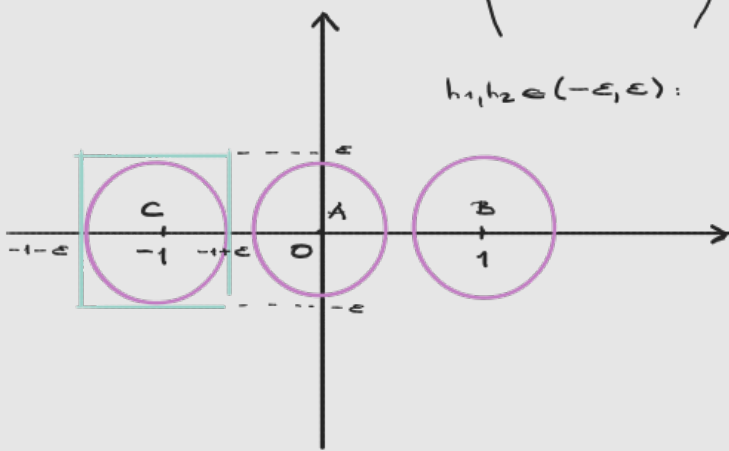
$$f(h_1, h_2) - f(0,0) = h_1^2(h_1^2 - 2) < 0 \text{ за } |h_1| < \sqrt{2}$$

$\rightsquigarrow$ разлика нека знак, тј. $(0,0)$ није екстремум!

ако је ова разлика ≥ 0 за све $h_1, h_2 \rightarrow (0,0)$ је лок. минимум
ако је $\leq 0 \rightarrow (0,0)$ је лок. максимум
ако нека знак $\rightarrow (0,0)$ није екстремум

$$* C(-1,0): H_f(-1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= 8 \\ M_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ поново не може Силвестер}$$



$$\begin{aligned} h_1, h_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon): \quad f(-1+h_1, 0+h_2) - f(-1,0) &= \underbrace{(h_1-1)^4}_{\geq 0} + \underbrace{h_2^4}_{\geq 0} - 2\underbrace{(h_1-1)^2}_{\geq 0} + 1 \\ &= ((h_1-1)^2 - 1)^2 + h_2^4 \geq 0 \text{ за све } h_1, h_2! \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(-1+h_1, h_2) \geq f(-1,0)$$

$\Rightarrow C(-1,0)$ је локални минимум!
(оде је чак глобални)
 $f(-1,0) = -1$

* $B(1,0)$: $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ точно не може критерий!

$$f(1+h_1, h_2) - f(1,0) = (1+h_1)^4 + h_2^4 - 2(1+h_1)^2 + 1$$

$$= ((1+h_1)^2 - 1)^2 + h_2^4 \geq 0 \quad \text{за все } h_1, h_2$$

$\leadsto (1,0)$ је ^(и глобалног) такђе тачка лок. минимума што смо и отекливали
 јер $f(1,0) = f(-1,0) = -1$

④ Испитати екстремне вредности функције $f(x,y) = x^2y^3(6-x-y)$ на $\mathbb{R}^2$
 $\mathbb{R}^2$ - отворен и

$$f'_x = 2xy^3(6-x-y) - x^2y^3 = y^3(12x - 3x^2 - 2xy) = xy^3(12-3x-2y)$$

$$f'_y = 3x^2y^2(6-x-y) - x^2y^3 = x^2y^2(18-3x-4y)$$

$$f'_x = 0 \iff x=0 \vee y=0 \vee 12-3x-2y=0$$

ако је $x=0 \Rightarrow f'_y=0$ за све $y \in \mathbb{R} \leadsto N_t(0,t)$, т.е. y произвољне тачке

ако је $y=0 \Rightarrow f'_x=0$ за све $x \in \mathbb{R} \leadsto M_t(t,0)$, т.е. x произвољне тачке

остаје још $12-3x-2y=0 \wedge x,y \neq 0$

$$f'_y = 0 \iff \begin{cases} 18-3x-4y=0 \\ 2y=6 \Rightarrow y=3 \text{ и } x=2 \leadsto A(2,3) \end{cases}$$

$$f''_{xx} = y^3(12-3x-2y) - 3xy^3 = y^3(12-6x-2y)$$

$$f''_{xy} = 3xy^2(12-3x-2y) - 2xy^3 = xy^2(36-9x-8y) = f''_{yx}$$

$$f''_{yy} = 2x^2y(18-3x-4y) - 4x^2y^2 = 2x^2y(18-3x-6y)$$

$$\leadsto H_f(x,y) = \begin{pmatrix} y^3(12-6x-2y) & xy^2(36-9x-8y) \\ xy^2(36-9x-8y) & 2x^2y(18-3x-6y) \end{pmatrix}$$

* $A(2,3)$: $H_f(2,3) = \begin{pmatrix} -6 \cdot 27 & 18 \cdot (-6) \\ 18 \cdot (-6) & 24 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -162 & -108 \\ -108 & -144 \end{pmatrix}$

$$M_1 = -162 < 0$$

$$M_2 = 162 \cdot 144 - 108^2 > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} M_1 < 0 \\ M_2 > 0 \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{Силвестер}} A(2,3) \text{ је тачка локалног максимума}$$

$$f(2,2) = 108$$

* $M_t(t,0)$:

$$H_f(t,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

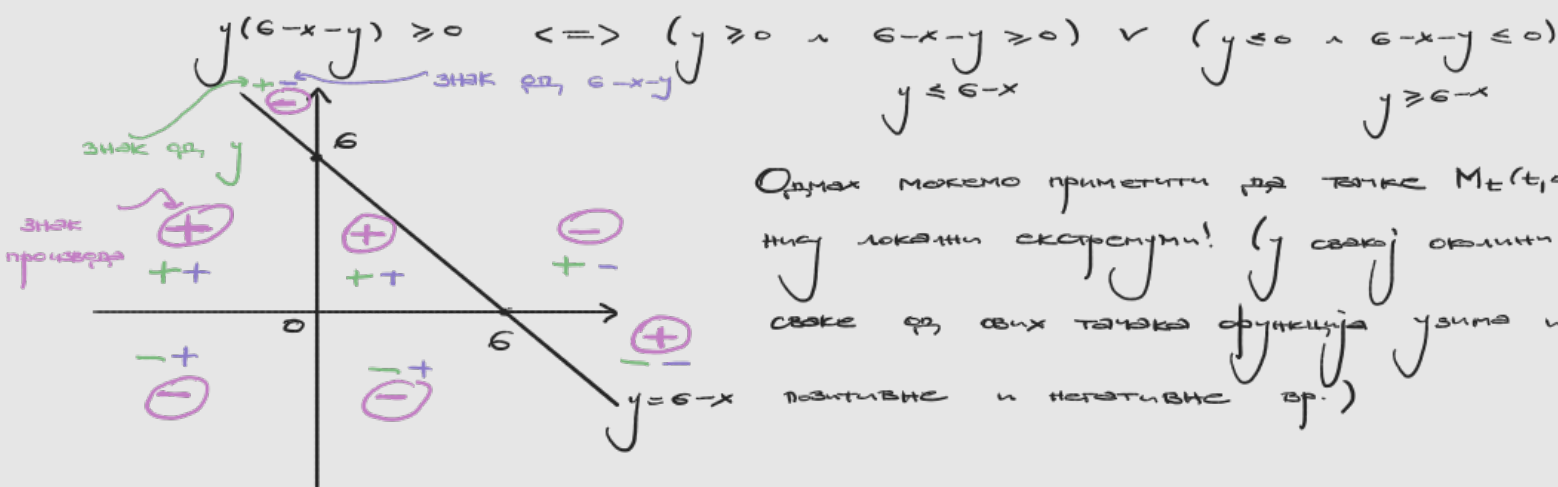
* $N_t(0,t)$:

$$H_f(0,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

НЕ МОЖЕ СИЛВЕСТЕР!

Приметимо: $f(M_t) = f(N_t) = 0 \leadsto$ да бисмо утврдили да ли је нека од ових тачака локални екстремум, довољно је утврдити знак функције f :

Позитивно: $f(x,y) = x^2 y^3 (6-x-y) = \underbrace{x^2 y^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{y(6-x-y)}_{\text{од овог дефинише знак!}}$



Одмах можемо приметити да тачке $M_t(t,0)$ нису локални екстремуми! (у свакој околини сваке од ових тачака функција узима и позитивне и негативне вр.)

Дале, посматрајмо тачке $N_t(0,t)$:

- (1) $t < 0 \leadsto N_t$ је лок. максимум (у свакој околини $f \leq 0$)
- (2) $t = 0 \leadsto$ није екстремум
- (3) $0 < t < 6 \leadsto N_t$ је лок. минимум (у свакој околини је $f \geq 0$)
- (4) $t = 6 \leadsto$ није екстремум
- (5) $t > 6 \leadsto N_t$ је лок. максимум (у свакој околини $f \leq 0$)

□

5. Опређити екстремне вредности функције $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 12xy + 2z$ на $\mathbb{R}^3$.

$\mathbb{R}^3$ - отворен и

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 12y = 0 \\ f'_y = 2y + 12x = 0 \\ f'_z = 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -4y \\ y = -6x \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 24x = 0 \\ x(x-24) = 0 \\ x=0 \downarrow y=0 \\ x=24 \downarrow y=-144 \end{cases}$$

Два кандидата:

$$\begin{aligned} A(0,0,-1) \\ B(24,-144,-1) \end{aligned}$$

$$f''_{xx} = 6x \quad f''_{xy} = 12 = f''_{yx} \quad f''_{xz} = f''_{zx} = 0$$

$$f''_{yy} = 2 \quad f''_{yz} = f''_{zy} = 0$$

$$f''_{zz} = 2$$

$$\leadsto H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$* A(0,0,-1): H_f(0,0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$M_1 = 0$ — не може Силвестер!

$$f(h_1, h_2, -1+h_3) - f(0,0,-1) = h_1^3 + h_2^2 + (h_3-1)^2 + 12h_1h_2 + 2(h_3-1) + 1$$

$$= h_1^3 + h_2^2 + 12h_1h_2 + (h_3-1)+1^2$$

$$= h_1^3 + h_2^2 + 12h_1h_2 + h_3^2$$

пром. знака

$$\text{Пока } \exists \text{ нпр. } h_2 = h_3 = 0: f(h_1, h_2, -1+h_3) - f(0,0,-1) = h_1^3 \begin{cases} > 0 \text{ за } h_1 > 0 \\ < 0 \text{ за } h_1 < 0 \end{cases}$$

$\leadsto A(0,0,-1)$ није екстремум

$$* B(24, -144, -1): H_f(-24, -144, -1) = \begin{pmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = 144 > 0$$

$$M_2 = 288 - 144 = 144 > 0$$

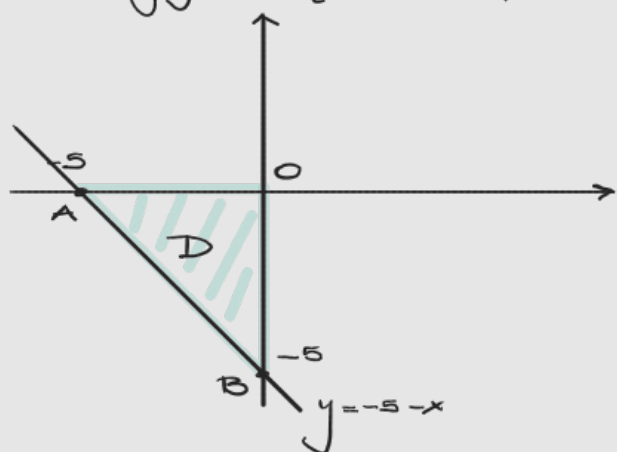
$$M_3 = 2 \cdot 144 = 288 > 0$$

Силвестер

$\Rightarrow B(24, -144, -1)$ је тачка лок. минимума, $f(24, -144, -1) = 13824$

□

⑥ Одредити глобални минимум и максимум (ако постоје) функције $f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ на скупу $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \leq 0, x+y+5 \geq 0\}$



D није отворен!

D је затворен:

$$D = \{x \leq 0\} \cap \{y \leq 0\} \cap \{x+y+5 \leq 0\}$$

$$= f_1^{-1}((-\infty, 0]) \cap f_2^{-1}((-\infty, 0]) \cap f_3^{-1}((-\infty, 0])$$

при чему су $f_1(x,y) = x$ $f_2(x,y) = y$ $f_3(x,y) = x+y+5$ затворени скупови

— непрекидне функције

$\Rightarrow D$ је затворен као пресек 3 затворена скупа (сваки појединачно је затворен као инверзна слика затвореног скупа при непрекидној функцији)

Такође, D је ограничено

D затворен и ограничен $\Rightarrow D$ је компактан $\left\{ \begin{array}{l} \text{Важно!} \\ f \text{ је непрекидна} \end{array} \right\} \Rightarrow f$ има минимум и максимум на D
(и то, нарочито, на којој од стационарних тачака!)

$\leadsto$ довољно је наћи кандидате и вредности f је
најмо кандидате, тј. стационарне тачке: f има!

(1) $\text{int } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0, y < 0, x+y+5 > 0\}$ - отворен

$$\begin{aligned} f'_x &= 2x - y + 3 = 0 & \Leftrightarrow & 2x - y = -3 \\ f'_y &= -x + 4y + 2 = 0 & \Leftrightarrow & 4y - x = -2 \end{aligned} \quad \uparrow 2$$

$$\leadsto 7y = -7 \Rightarrow y = -1$$

$$\downarrow$$

$$x = -2$$

интервалност од D

$M(-2, -1) \in \text{int } D$

кад, нађемо тачку морамо да проверимо да ли је у D !

(2) граница OA :

$OA = \{(x, 0) \mid -5 \leq x \leq 0\}$ - овде траже стационарне тачке тражимо на $\text{int } OA$, тј. за $-5 < x < 0$, а тачка A и O проверавамо одвојено

f постаје функција једне променљиве

$$f(x, 0) = x^2 + 3x + 1 = g(x)$$

$$g'(x) = 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \in (-5, 0) \text{ и}$$

$$\leadsto N(-\frac{3}{2}, 0), A(-5, 0), O(0, 0)$$

(3) граница OB :

$OB = \{(0, y) \mid -5 \leq y \leq 0\}$

$$f(0, y) = y^2 + 2y + 1 = h(y), \quad -5 < y < 0$$

$$h'(y) = 4y + 2 \leadsto y = -\frac{1}{2} \in (-5, 0)$$

$$\leadsto P(0, -\frac{1}{2}), B(0, -5)$$

(4) граница AB :

$AB = \{(x, y) \mid y = -x-5, -5 \leq x \leq 0\}$

$$f(x, -5-x) = x^2 + x(5+x) + 2(5+x)^2 + 3x - 2(5+x) + 1$$

$$= x^2 + 5x + x^2 + 50 + 20x + 2x^2 + 3x - 10 - 2x + 1 = 4x^2 + 26x + 41 = \varphi(x)$$

$$\varphi'(x) = 8x + 26 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{26}{8} = -\frac{13}{4} \in (-5, 0)$$

$$\leadsto Q(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4})$$

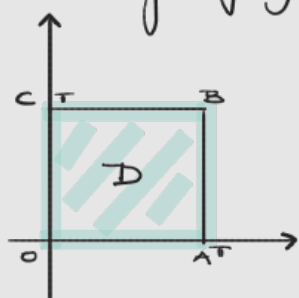
Далје, добили смо кандидате: $O(0,0)$, $M(-2,-1)$, $N(-\frac{5}{2},0)$, $A(-5,0)$, $P(0,-\frac{1}{2})$
 $B(0,-5)$ и $Q(-\frac{13}{4},-\frac{7}{4})$

Продолјаје да израчунамо вредности f овим тачкама и на основу тога нађемо минимум и максимум:

$$\begin{array}{llll} f(O) = 1 & f(N) = -\frac{5}{4} & f(P) = -\frac{1}{2} & f(Q) = -\frac{5}{4} \\ f(M) = -3 & f(A) = 11 & f(B) = 41 & \end{array}$$

мин! макс!

7. Нека је $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ и $D = [0,\pi] \times [0,\pi]$. Наћи $f(D)$.



Приметимо: f је непрекидна
 D компактан
 (као производ 2 компакта или као y претх. задатку)
 Вајерштрас $\Rightarrow f$ достиже мин. и макс.

Такође: D повезан
 f непрекидна $\Rightarrow f(D) \subseteq \mathbb{R}$ је повезан
 $\Rightarrow f(D)$ је интервал!
 $\leadsto f(D) = [f_{\min}, f_{\max}]$

Као у претходном задатку, повезано је да нађемо кандидате:
 (1) $\text{int } D = (0,\pi) \times (0,\pi)$ - отворен

$$\begin{cases} f'_x = \cos x - \cos(x+y) = 0 \\ f'_y = \cos y - \cos(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos y \\ \Rightarrow x = y \end{cases} \quad (\cos \text{ је инјективан на } (0,\pi))$$

Нађимо x : $\cos x - \cos 2x = 0$

$$\cos x - (\cos^2 x - \underbrace{\sin^2 x}_{1 - \cos^2 x}) = 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Смена: $t = \cos x$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = 1$$

не важи ни за

јер $x \in (0,\pi)$!

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

$$\leadsto M\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$(2) \partial A = \{(x,0) \mid 0 \leq x \leq \pi\}$$

$f(x,0) = \sin x - \sin x = 0 \leadsto$ константна f је (све тачке y и мин. и макс.)

$$(3) OC = \{(0, y) \mid 0 \leq y \leq \pi\}$$

$$f(0, y) = 0 \leadsto \text{takoj e const. dolo}$$

$$(4) AB = \{(\pi, y) \mid 0 \leq y \leq \pi\}$$

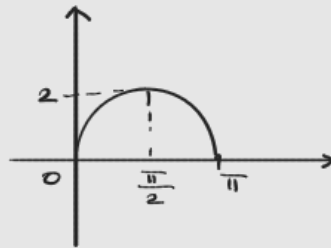
$$f(\pi, y) = \sin y - \underbrace{\sin(\pi + y)}_{-\sin y} = 2\sin y = f(y)$$

$$g \text{ dostizhe maks. u } y = \frac{\pi}{2}$$

$$\leadsto N(\pi, \frac{\pi}{2}), A(\pi, 0), B(\pi, \pi)$$

$$(5) BC = \{(x, \pi) \mid 0 \leq x \leq \pi\}$$

$$f(x, \pi) = 2\sin x \leadsto P(\frac{\pi}{2}, \pi), C(0, \pi)$$



Израчунамо вредности функције у катедрама:

$$f(M) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$f(N) = 2$$

$$f(P) = 2$$

$$f(O) = f(A) = f(B) = f(C) = 0$$

$$\Rightarrow f(D) = [0, 2]$$

$f_{\max}$

$f_{\min}$

□