

* Нека је $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и $g_1, \dots, g_s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ глатке функције и нека је

$$B = \left\{ \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_x \in A \mid g_1(x) = \dots = g_s(x) = 0 \right\}$$

ЗАДАТАК: Одредити локалне екстремуме од f на B (тј. при условима $g_1(x) = 0, \dots, g_s(x) = 0$)

РЕШЕЊЕ: Дефинишемо Лагранжеву функцију $F: A \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_s) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_s g_s(x_1, \dots, x_n)$$

и одредимо њене стационарне тачке, тј. тачке $a = (x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_s)$ за

$$\text{где је } \frac{\partial F}{\partial x_1}(a) = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(a) = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_s}(a) = 0$$

За сваку стационарну тачку a , посматрамо квадратну форму $\phi_a(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j \in n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i \cdot h_j$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Додатне услове: } \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \cdot h_n = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial g_s}{\partial x_1}(a) \cdot h_1 + \dots + \frac{\partial g_s}{\partial x_n}(a) \cdot h_n = 0 \end{array} \right\} \text{ s услова! } dg(a)(h_1, \dots, h_n) = 0!$$

ϕ_a позитивно дефинитна $\Rightarrow a$ је условни минимум

ϕ_a негативно дефинитна $\Rightarrow a$ је условни максимум

ϕ_a нема знак $\Rightarrow a$ није условни екстремум

① Наћи екстремне вредности функције $f(x,y,z) = xyz$ на $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$

↑
сфера са центром у $(0,0,0)$ полупречника $\sqrt{3}$

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 \quad (x^2 + y^2 + z^2 = 3 \Leftrightarrow g(x,y,z) = 0)$$

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = xyz + \lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 - 3\lambda$$

$$1^\circ F'_x = yz + 2\lambda x = 0 \quad / \cdot x$$

$$2^\circ F'_y = xz + 2\lambda y = 0 \quad / \cdot y$$

$$3^\circ F'_z = xy + 2\lambda z = 0 \quad / \cdot z$$

$$4^\circ F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} xyz + 2\lambda x^2 = 0 \\ xyz + 2\lambda y^2 = 0 \\ xyz + 2\lambda z^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda x^2 = \lambda y^2 = \lambda z^2$$

Разликујемо случајеве (1) $\lambda \neq 0$
(2) $\lambda = 0$

$$(1) \lambda \neq 0 \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2$$

$$4^\circ \Rightarrow 3x^2 = 3$$

$$\Rightarrow x^2 = 1, \text{ тј. } x = \pm 1 \text{ и слично } y = \pm 1 \text{ и } z = \pm 1$$

Паки, одбили смо 0 тачака и за сваку треба да имамо λ :

$$M_1(1,1,1) - \lambda = -\frac{1}{2} \quad M_2(1,-1,1) - \lambda = \frac{1}{2} \quad M_3(-1,-1,1) - \lambda = -\frac{1}{2} \quad M_4(-1,1,1) - \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$M_5(1,1,-1) - \lambda = \frac{1}{2} \quad M_6(-1,1,-1) - \lambda = \frac{1}{2} \quad M_7(1,-1,-1) - \lambda = -\frac{1}{2} \quad M_8(-1,-1,-1) - \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$(2) \lambda = 0 \quad 1^\circ \Rightarrow yz = 0 \begin{cases} 2.1 \quad y = 0 \\ 2.2 \quad z = 0 \end{cases}$$

$$2.1 \quad y = 0 \quad 2^\circ \Rightarrow xz = 0$$

$$x = 0$$

$$z^2 = 3$$

$$\text{т.е. } z = \pm\sqrt{3}$$

$$z = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$\text{т.е. } x = \pm\sqrt{3}$$

$$2.2 \quad z = 0 \quad \text{аналогно, получим еще точки } (0, \sqrt{3}, 0) \text{ и } (0, -\sqrt{3}, 0)$$

$$\left. \begin{array}{lll} N_1(\sqrt{3}, 0, 0) & N_3(0, \sqrt{3}, 0) & N_5(0, 0, \sqrt{3}) \\ N_2(-\sqrt{3}, 0, 0) & N_4(0, -\sqrt{3}, 0) & N_6(0, 0, -\sqrt{3}) \end{array} \right\} \text{ все } j \in \lambda = 0$$

Определим квадратичную форму Φ_p в произвольной точке $p(x, y, z)$:

$$\left. \begin{array}{l} F''_{xx} = 2\lambda \quad F''_{yy} = 2\lambda \quad F''_{zz} = 2\lambda \\ F''_{xy} = z = F''_{yx} \quad F''_{yz} = x = F''_{zy} \\ F''_{xz} = y = F''_{zx} \end{array} \right\} \leadsto \Phi_p(h_1, h_2, h_3) = 2\lambda h_1^2 + 2zh_1h_2 + 2yh_1h_3 + 2xh_2h_3 + 2\lambda h_2^2 + 2\lambda h_3^2$$

$$\textcircled{*} g'_x(x, y, z)h_1 + g'_y(x, y, z)h_2 + g'_z(x, y, z)h_3 = 0 \quad - \text{необходимый условие} \\ \Rightarrow 2xh_1 + 2yh_2 + 2zh_3 = 0$$

Испытаем точки $M_1(1, 1, 1)$ и $N_1(\sqrt{3}, 0, 0)$ (остальные аналогично)

$$* M_1(1, 1, 1), \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$\Phi_{M_1}(h_1, h_2, h_3) = -h_1^2 - h_2^2 - h_3^2 + 2h_1h_2 + 2h_2h_3 + 2h_1h_3$$

$$\textcircled{*} j \in \text{где } 2h_1 + 2h_2 + 2h_3 = 0 \leadsto h_3 = -h_1 - h_2$$

$$\leadsto \Phi_{M_1}(h_1, h_2, h_3) = -h_1^2 - h_2^2 - (h_1 + h_2)^2 + 2h_1h_2 - 2h_2(h_1 + h_2) - 2h_1(h_1 + h_2) \\ = -4h_1^2 - 4h_2^2 - 4h_1h_2 = -4(h_1^2 + h_2^2 + h_1h_2) \leq 0 \\ (h_1 + \frac{h_2}{2})^2 + \frac{3}{4}h_2^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \Phi_{M_1} \text{ jе неограниченно отрицательно } \Rightarrow M_1(1, 1, 1) \text{ jе лок. максимум } \text{за } f \text{ при } j \in \lambda = 0$$

$$* N_1(\sqrt{3}, 0, 0), \lambda = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_{N_1}(h_1, h_2, h_3) = 2\sqrt{3}h_2h_3 \\ \begin{cases} h_2 \geq 0, h_3 \geq 0 \Rightarrow \Phi_{N_1}(h_1, h_2, h_3) \geq 0 \\ h_2 \leq 0, h_3 \geq 0 \Rightarrow \Phi_{N_1}(h_1, h_2, h_3) \leq 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow N_1 \text{ не является экстремумом!}$$

$$\circledast \Rightarrow 2\sqrt{5} h_1 = 0 \Rightarrow h_1 = 0$$

□

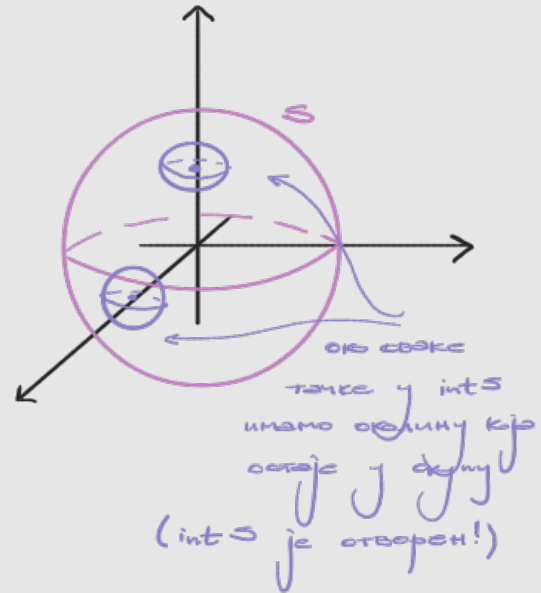
②. Определити најмању и највећу вредност функције $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ на скупу $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$

f непрекидна
 S компактан $\Rightarrow$ постижу се минимум и максимум (и довољно је наћи кандидате)

$$(1) \text{ int } S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$$

тражимо стационарне тачке функције f .

$$\left. \begin{aligned} f'_x &= 2x = 0 \\ f'_y &= 4y = 0 \\ f'_z &= 6z = 0 \end{aligned} \right\} \rightsquigarrow A_1(0,0,0) \in S$$



$$(2) \text{ граница скупа: } x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$$

треба нам Лагранжева функција:

$$F(x,y,z,\lambda) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$$

$$\left. \begin{aligned} 1^\circ F'_x &= 2x(\lambda+1) = 0 \\ 2^\circ F'_y &= 2y(\lambda+2) = 0 \\ 3^\circ F'_z &= 2z(\lambda+3) = 0 \\ 4^\circ F'_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Раздвајамо случајеве по } \lambda: \\ &(1) \lambda = -1 \quad (4) \lambda \neq -1, -2, -3 \\ &(2) \lambda = -2 \\ &(3) \lambda = -3 \end{aligned}$$

$$(1) \lambda = -1 \quad \left. \begin{aligned} 2^\circ \\ 3^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = z = 0 \rightsquigarrow A_2(3,0,0)$$

$$4^\circ \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \rightsquigarrow A_3(-3,0,0)$$

$$(2) \lambda = -2 \quad \left. \begin{aligned} 1^\circ \\ 3^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = z = 0 \rightsquigarrow A_4(0,3,0)$$

$$4^\circ \Rightarrow y = \pm 3 \rightsquigarrow A_5(0,-3,0)$$

$$(3) \lambda = -3 \quad \left. \begin{aligned} 1^\circ \\ 2^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = y = 0 \rightsquigarrow A_6(0,0,3)$$

$$4^\circ \Rightarrow z = \pm 3 \rightsquigarrow A_7(0,0,-3)$$

$$(4) \lambda \neq -1, -2, -3$$

$$1^\circ, 2^\circ, 3^\circ \Rightarrow x=y=z=0$$

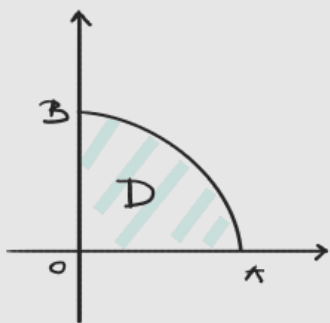
$$\text{или } 4^\circ \Rightarrow 0=0 \quad \nparallel$$

Остаје још да изразимо вредност функције у тачкама $A_1 - A_7 \dots$

$$\begin{aligned} f_{\max} &= f(A_7) = 27 \\ f_{\min} &= f(A_1) = 0 \end{aligned}$$

□

③. Нека је дата функција $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$ и окуп $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Наћи $f(D)$.



D компактан (затворен и ограничен)
 f непрекидана $\left. \vphantom{\begin{matrix} D \text{ компактан} \\ f \text{ непрекидана} \end{matrix}} \right\} \Rightarrow f$ достиже мин. и макс. на D

$$D \text{ повозан} \rightsquigarrow f(D) = [f_{\min}, f_{\max}]$$

1° $\text{int } D$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x - 3 = 0$$

$$\begin{aligned} &\left. \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x - 3 = 0 \end{matrix} \right\} \xrightarrow{(-2)} \Rightarrow -3y + 3 = 0 \Rightarrow y = 1, x = 1 \\ &\rightsquigarrow \underline{M(1,1)} (\in \text{int } D) \end{aligned}$$

$$2^\circ \text{ OA} = \{(x,0) \mid 0 \leq x \leq 2\}$$

$$f(x,0) = x^2 - 3x =: g(x)$$

$$g'(x) = 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \in (0,2)$$

$$\rightsquigarrow \underline{N(\frac{3}{2}, 0), O(0,0), A(2,0)}$$

$$3^\circ \text{ OB} = \{(0,y) \mid 0 \leq y \leq 2\}$$

$$f(0,y) = y^2 - 3y =: h(y) \quad (\text{овс аналогично као у } 2^\circ)$$

$$\rightsquigarrow \underline{P(0, \frac{3}{2}), B(0,2)}$$

4° $\widehat{AB}$

I начин: $AB = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{4-x^2}, 0 \leq x \leq 2 \}$

$$\varphi(x) = f(x, \sqrt{4-x^2}) = x^2 + x\sqrt{4-x^2} + 4 - x^2 - 3x - 3\sqrt{4-x^2}$$

$$= 4 - 3x + x\sqrt{4-x^2} - 3\sqrt{4-x^2}$$

$$\varphi'(x) = \dots$$

II начин: Прок Лагранжеве функције

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 4, \quad x, y \in [0, 2]$$

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

III начин: Поларне координате ($r=2$!)

$$\widehat{AB}: x = 2\cos\theta, \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$y = 2\sin\theta$$

$$\psi(\theta) = f(2\cos\theta, 2\sin\theta) = 4\cos^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta + 4\sin^2\theta - 6\cos\theta - 6\sin\theta$$

$$= 4 + 4\cos\theta\sin\theta - 6\cos\theta - 6\sin\theta$$

$$\psi'(\theta) = -4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta + 6\sin\theta - 6\cos\theta$$

$$= 4(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 6(\sin\theta - \cos\theta)$$

$$= 4(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta) + 6(\sin\theta - \cos\theta)$$

$$= (\cos\theta - \sin\theta)(4\cos\theta + 4\sin\theta - 6) = 0$$

$$\cos\theta = \sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\leadsto Q(\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$2\cos\theta + 2\sin\theta - 3 = 0 \quad / \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} \quad \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{4} > 1 \quad \text{⚡}$$

Треба још израчунати вредности... $f(0) = 0$ - макс, $f(M) = -3$ - мин.

$$\leadsto f(D) = [-3, 0]$$

□

4. Нека је $f(x, y, z) = xyz$. Одредити локалне екстремуме т.д. важи

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{и} \quad x + y + z = 0$$

пресек сфере и равни

I НАЧИН: $z = -x - y$

$$g(x, y) := f(x, y, -x - y) = \dots \quad \text{и условия} \quad x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 1$$

сведемо на функцию две переменные

II НАЧИН:
$$\left. \begin{aligned} g(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ h(x, y, z) &= x + y + z \end{aligned} \right\} 2 \text{ условия!}$$

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f + \lambda g + \mu h$$
$$= xyz + \lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 - \lambda + \mu x + \mu y + \mu z$$

Трежно стационарные точки:

$$(1) F'_x = yz + 2\lambda x + \mu = 0$$

$$(2) F'_y = xz + 2\lambda y + \mu = 0$$

$$(3) F'_z = xy + 2\lambda z + \mu = 0$$

$$(4) F'_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$(5) F'_\mu = x + y + z = 0$$

$$(1) - (2): yz + 2\lambda x - xz - 2\lambda y = 0$$

$$z(y - x) + 2\lambda(x - y) = 0$$

$$(y - x)(z - 2\lambda) = 0$$

$$1^\circ y = x$$

$$(4) \Rightarrow 2x^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$(5) \Rightarrow 2x + z = 0 \Rightarrow z = -2x$$

$$\left\{ \begin{aligned} 6x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{6} \end{aligned} \right.$$

$$\leadsto x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}} = y$$

$$\leadsto z = \mp \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\leadsto \boxed{\begin{aligned} M_1 &\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right) \\ M_2 &\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \end{aligned}}$$

треба изрăчунати λ и μ з M_1 (и M_2):

$$\left. \begin{aligned} (2) &\Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\lambda + \mu = 0 \\ (3) &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\lambda + \mu = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{6}\lambda = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\underline{\mu = \frac{1}{6}}$$

и анально з M_2

$$2^\circ z = 2\lambda$$

$$(2) - (3) \Rightarrow x(z - y) + 2\lambda(y - z) = 0$$
$$(x - 2\lambda)(z - y) = 0$$

$$2.1^\circ x = 2\lambda$$

$$(5) \Rightarrow y = -4\lambda$$

$$(4) \Rightarrow 4\lambda^2 + 16\lambda^2 + 4\lambda^2 - 1 = 0$$

$$24\lambda^2 = 1$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{24}$$

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{6}} \rightsquigarrow M_3\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{6}} \rightsquigarrow M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$2.2^\circ \quad z = y = 2\lambda$$

$$\Rightarrow x = -4\lambda$$

и анално се пронађу

$$M_5\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$M_6\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$F_{xx}'' = 2\lambda$$

$$F_{yy}'' = 2\lambda$$

$$F_{zz}'' = 2\lambda$$

$$F_{xy}'' = z = F_{yx}''$$

$$F_{yz}'' = x = F_{zy}''$$

$$F_{xz}'' = y = F_{zx}''$$

Испитајмо једну тачку: нпр. $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{6}}$, $\mu = \frac{1}{6}$

$$\Phi_{M_1}(h_1, h_2, h_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}h_1^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}h_2^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}h_3^2 - \frac{4}{\sqrt{6}}h_1h_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}h_1h_3 + \frac{2}{\sqrt{6}}h_2h_3$$

Додатни услови:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_1)h_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_1)h_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(M_1)h_3 = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_1)h_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(M_1)h_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(M_1)h_3 = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{6}}h_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}h_2 - \frac{4}{\sqrt{6}}h_3 = 0 \rightsquigarrow h_1 + h_2 = 2h_3$$

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0 \rightsquigarrow h_1 + h_2 = -h_3$$

$$\Rightarrow h_3 = 0$$

$$\rightsquigarrow h_1 = -h_2$$

уз ове услове, Φ_{M_1} постаје

$$\Phi_{M_1}(h_1, h_2, h_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}h_1^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}h_1^2 + \frac{4}{\sqrt{6}}h_1^2$$

$$= \sqrt{6}h_1^2 > 0$$

$$\Rightarrow M_1 \text{ је лок. минимум (условни!)}$$

Аналогно се провери за остале

тачке...



⑤ На сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ наћи тачку на највећем растојању од тачке $(0,0,3)$. Колико је то растојање?

$$f = \text{растојање од тачке } (0,0,3) \Rightarrow f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2}$$

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 8$$

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z) = 0 \right\} \text{ је компактан } \Rightarrow f \text{ достиже мин. и макс. на } S$$

+ f непрекидна

$\sqrt{}$ је растућа функција $\Rightarrow h(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-3)^2$ и f имају исте тачке минимума и максимума, па ћемо наћи екстремуме од h (лакше је рачунати јер нема корена)

$$F(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + (z-3)^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8)$$

$$\left. \begin{aligned} (1) F'_x &= 2x + 2\lambda x = 2x(\lambda+1) = 0 \\ (2) F'_y &= 2y + 4\lambda y = 2y(1+2\lambda) = 0 \\ (3) F'_z &= 2(z-3) + 8\lambda z = 0 \\ (4) F'_\lambda &= x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x(\lambda+1) &= 0 \\ y(2\lambda+1) &= 0 \end{aligned}$$

1° $\lambda = -1$:

$$(2) \Rightarrow y = 0$$

$$(3) \Rightarrow 2z - 6 - 8z = 0$$

$$\Rightarrow z = -1$$

$$x^2 = 8 - 4 = 4 \leadsto x = \pm 2$$

$$M_1(2, 0, -1)$$

$$M_2(-2, 0, -1)$$

2° $\lambda = -\frac{1}{2}$:

$$(1) \Rightarrow x = 0$$

$$(3) \Rightarrow 2z - 6 - 4z = 0$$

$$\Rightarrow z = -3$$

$$(4) \Rightarrow 2y^2 = 8 - 4 \cdot 9 = -28 < 0$$

тј. нема решења

$$3^\circ x \neq -1, -\frac{1}{2}$$

$$(1), (2) \Rightarrow x=y=0$$

$$(4) \Rightarrow 4z^2=8$$

$$z^2=2 \rightsquigarrow z=\pm\sqrt{2}$$

$$M_3(0,0,\sqrt{2})$$

$$M_4(0,0,-\sqrt{2})$$

$$f(M_1) = f(M_2) = 20 \quad - \text{МАКС!}$$

$$f(M_3) = (\sqrt{2}-3)^2$$

$$f(M_4) = (\sqrt{2}+3)^2$$

$$// \quad 20 > (\sqrt{2}+3)^2?$$

$$20 > 9 + 6\sqrt{2} + 2 = 11 + 6\sqrt{2}$$

$$\uparrow$$

$$9 > 6\sqrt{2} / 2$$

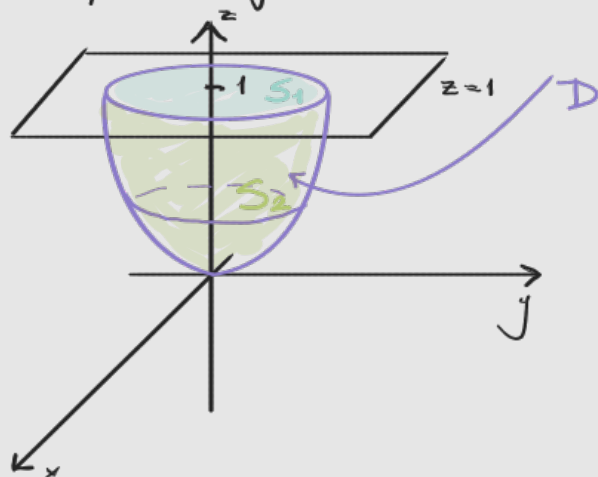
$$81 > 36 \cdot 2 = 72 \quad \checkmark$$

//

□

$$6. \text{ Нeka } f = f(x,y,z) = x+y+z \text{ и } D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq z \leq 1\}.$$

Определить $f(D)$.



$z=1$ - равен

у пресеку D са свакиm $z > 0$ добијемо круг

Полупречника $\sqrt{z}$, а за $z=0$ само координату.

проблем

$$z = x^2 + y^2 \text{ - ПАРАБОЛОИД}$$

D компактан

f непрекидана

$$\left. \begin{array}{l} D \text{ компактан} \\ f \text{ непрекидана} \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ достиже мин. и макс.}$$

D повезан

$$\Rightarrow f(D) = [f_{\min}, f_{\max}]$$

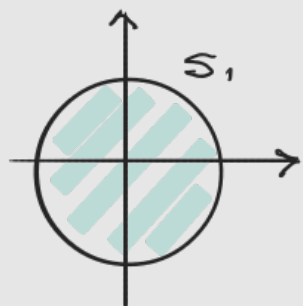
$$D = \text{int } D \cup S_1 \cup S_2$$

"поклопац" "омотај"

$$1^\circ \text{ int } D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 < z < 1\} \text{ - отворен}$$

$$f'_x = 1 \neq 0 \rightsquigarrow \text{нема стаз. тачака на int } D!$$

$$2^\circ S_1 = \{ (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$$



Определить внутренность и границу от S_1

* int S_1 :

$$f(x, y, 1) = x + y + 1 = g(x, y)$$

$$g'_x = 1 \neq 0 \leadsto \text{нет ст. т.ч.}$$

* Граница: $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$

I способ: Лагранжера функция...

II способ: Полярные координаты:

$$x = \cos \theta$$

$\theta \in \mathbb{R}$ - ответ!

$$y = \sin \theta$$

$$h(\theta) = g(\cos \theta, \sin \theta) = \cos \theta + \sin \theta + 1$$

$$h'(\theta) = \cos \theta - \sin \theta = 0 \leadsto \sin \theta = \cos \theta$$

$$\leadsto \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

за $k=0$:

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = y \leadsto M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

за $k=\pi$:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} = y \leadsto M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

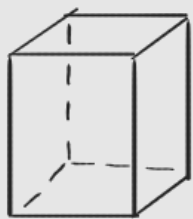
$$3^\circ S_2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z, z < 1 \} - \text{ответ}$$

$$\varphi(x, y) = f(x, y, x^2 + y^2) = x + y + x^2 + y^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi'_x = 1 + 2x = 0 \\ \varphi'_y = 1 + 2y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (x, y) \in S_2! \\ x = y = -\frac{1}{2} \\ z = x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \end{array} \leadsto M_3\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

избавляемся от... $f(D) = \left[-\frac{1}{2}, \sqrt{2} + 1\right]$

⑦ Нека је површина квадрата $P = 6a^2$, $a > 0$. За коју вредност страница квадрата је запремина највећа?



x, y, z - странице квадрата

$$P = 2xy + 2yz + 2xz = 6a^2 - \text{услов}$$

$$g(x, y, z) = xy + yz + xz - 3a^2 = 0$$

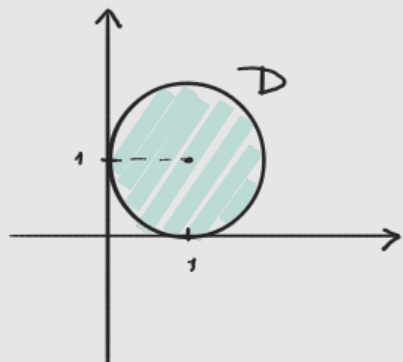
Максимизујемо запремину: $f(x, y, z) = xyz$

⋮ (за вежбу)

РЕШЕЊЕ: $x = y = z = a$

□

⑧ $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. Одредити $f(D)$, при чему је $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$



$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, D \subset D_f \text{ и}$$

$$\left. \begin{array}{l} D \text{ компактан и повезан} \\ f \text{ непрекидна} \end{array} \right\} \Rightarrow f(D) = [f_{\min}, f_{\max}]$$

$\ln, \sqrt{}$ растуће функције $\Rightarrow$ композиција је растућа
 $\leadsto$ довољно је наћи екстремуме за $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ на D .

$$1^\circ \text{ int} D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi'_x = 2x = 0 \\ \varphi'_y = 2y = 0 \end{array} \right\} (x, y) = (0, 0) \notin \text{int} D \leadsto \text{овде нема ст. ц. тачака}$$

$$2^\circ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\}$$

Лагранжева функција: $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda((x-1)^2 + (y-1)^2 - 1)$

$$(1) F'_x = 2x + 2\lambda(x-1) = 0 \quad (3) F'_\lambda = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$$

$$(2) F'_y = 2y + 2\lambda(y-1) = 0$$

$$(1) - (2): 2(x-y) + 2\lambda(x-y) = 0$$

$$2(x-y)(1+\lambda) = 0$$

$$1) x=y$$

$$(3) \Rightarrow 2(x-1)^2 = 1$$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\leadsto x-1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = y_1$$

$$x_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = y_2$$

$$\leadsto M_1 \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right), M_2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$2) \lambda = -1:$$

$$(1) \Rightarrow 2x - 2x + 2 = 0$$

$$2 = 0 \quad \nrightarrow \text{Нема решения}$$

$$\varphi(M_1) = 3 + 2\sqrt{2} \quad - \text{МАКС}$$

$$\varphi(M_2) = 3 - 2\sqrt{2} \quad - \text{МИН}$$

$$\Rightarrow f(D) = [\ln \sqrt{3-2\sqrt{2}}, \ln \sqrt{3+2\sqrt{2}}]$$

□