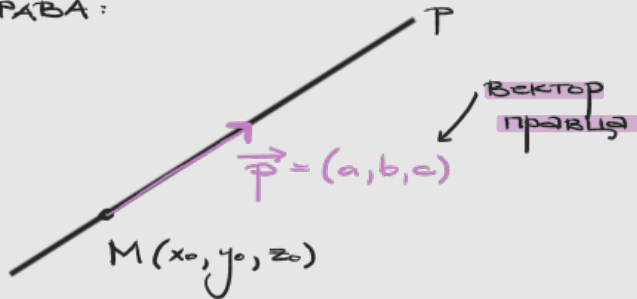


ТАЧКА, ПРАВА И РАВАН

• ПРАВА:



* права је једнозначно одређена тачком (нпр. $M \in P$) и вектором правца

* ПАРАМЕТАРСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ ПРАВЕ:

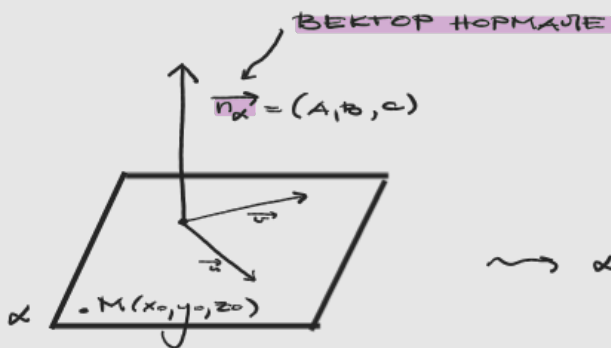
$$\begin{aligned} x &= at + x_0 \\ y &= bt + y_0 \\ z &= ct + z_0 \end{aligned}, t \in \mathbb{R}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $\vec{p}$ M

* Изражавањем t из параметарских једначина добијемо канонске једначине:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad \vec{p}$$

• РАВАН



ОПШТА ЈЕДНАЧИНА РАВНИ:

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$$

$\nwarrow \quad \nearrow \quad \nearrow$
 $\vec{n}_\alpha$

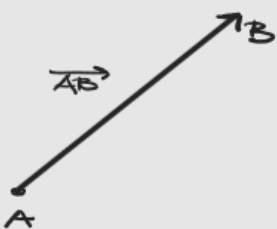
$$\leadsto \alpha: A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

НАПОМЕНА: Права може бити задата и као пресек две равни:

$$\begin{aligned} \alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ P: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{aligned}$$



ПОПТАК: ОСНОВНО О ВЕКТОРИМА



* **Вектор** је "умерена дуж" која је јединствено одређена правцем, смером и интензитетом

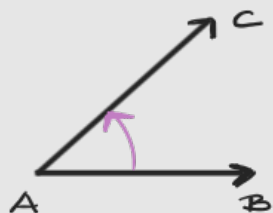
↑ дужина дужи AB, у ознаци $\|\vec{AB}\|$

• 2 вектора су колинеарни ако су им правци паралелни истој правој
 $\Leftrightarrow$ лин. зависни

$$(\vec{u} \text{ и } \vec{v} \text{ колинеарни}) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \vec{u} = k \cdot \vec{v}$$

3 вект су копланарни ако су им правци паралелни истој равни
 $\Leftrightarrow$ лин. независни

* СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД:



$\vec{u}, \vec{v}$ вектори $\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v})$

↗ БРОЈ
↑
[0, π]

у $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

СТАНДАРДНИ СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

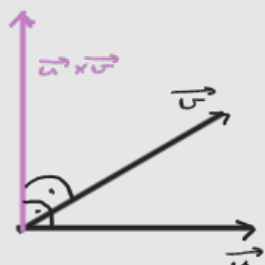
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

* ВЕКТОРСКИ ПРОИЗВОД

Векторски производ вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ је вектор $\vec{u} \times \vec{v}$ чији је правец ортогоналан на $\vec{u}$ и $\vec{v}$, интензитет $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$ и смер одређује

позитивном оријентацијом $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$

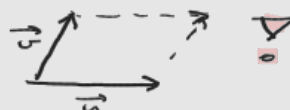
$\vec{u} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ и $\vec{v}$ колинеарни



у $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j} + u_3 \cdot \vec{k}$
 $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j} + v_3 \cdot \vec{k}$

$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1)$

$\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ је површина паралелограма



* МЕШОВИТИ ПРОИЗВОД

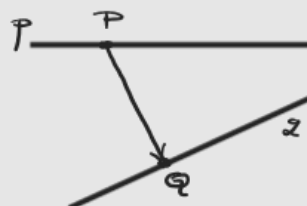
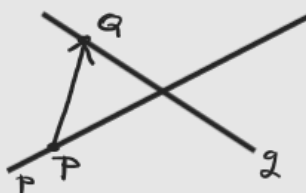
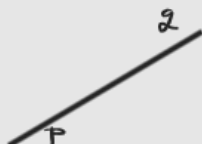
Мешовити производ вектора $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ је $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

у $\mathbb{R}^3$:

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ колинеарни

* ОДНОС ДВЕ ПРАВЕ:



(1) ПАРАЛЕЛНЕ
 $p \parallel l$

(2) ПОКЛПАЈУ СЕ

(3) СЕКУ СЕ

(4) МИМОПАЗНЕ

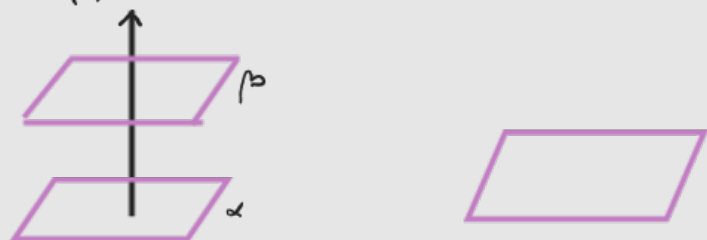
(1) и (2): Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ коллинеарны: $\vec{p} \times \vec{q} = 0$ ($\vec{p} = k \cdot \vec{q}$)

(3) и (4): Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны: $\vec{p} \times \vec{q} \neq 0$

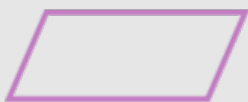
(3): $[\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}] = 0$, т.е. эти векторы коллинеарны (P произв. точка прямой p , Q произв. точка прямой q)

(4): $[\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}] \neq 0$

* ОТНОШЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ:



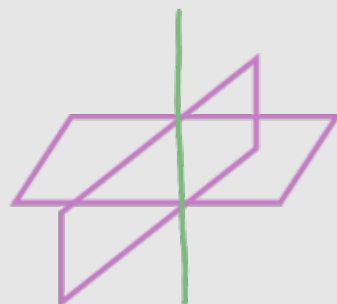
$\alpha \parallel \beta$



$\alpha \equiv \beta$

$$\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = 0$$

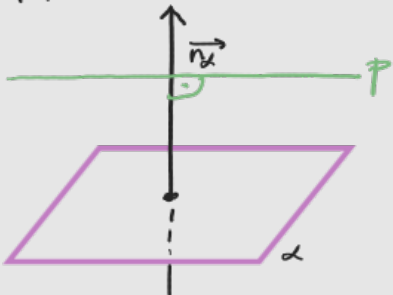
(векторы нормали коллинеарны)



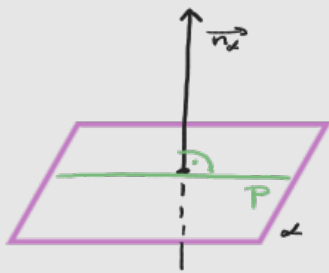
α и β пересекаются

$$\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta \neq 0$$

* ОТНОШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

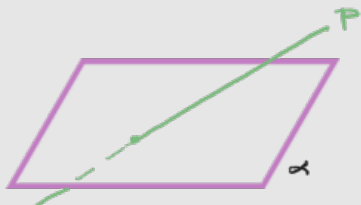


$p \parallel \alpha$



$p \subset \alpha$

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{p} = 0 \quad (\vec{n}_\alpha \perp \vec{p})$$



p и α пересекаются

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{p} \neq 0$$

1. Определить метр т.е. прямые $p: 2x - y = 3$, $x - y - z = 4$ и $g: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{m} = \frac{z-4}{2}$

будем метр:

(а) параллельно

(б) нормально

(а) $\alpha: 2x - y = 3$ $p \subset \alpha, \beta \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$
 $\beta: x - y - z = 4$ $\Rightarrow \vec{p} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 2, -1)$

$$\vec{g} = (-2, m, 2)$$

$$p \parallel g \Leftrightarrow \vec{p} = k \cdot \vec{g} \Leftrightarrow m = -4$$

$$(5) \quad p \perp g \Leftrightarrow \vec{p} \perp \vec{g} \quad \text{и} \quad p \cap g \text{ не пусто}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{g} = 0$$

$$-2 + 2m - 2$$

$$2m - 4, \text{ т.е. } m = 2$$

Из уравнения прямой g знаем, что $(1, -3, 4) \in g$

Нам нужна точка $A \in p$:

$$2x - y = 3$$

$$x - y - z = 4$$

$$x = 0: \begin{cases} -y = 3 \\ -y - z = 4 \end{cases} \quad A(0, -3, 5) \in p$$

$$\vec{AB} = (1, 6, -1)$$

$$[\vec{p}, \vec{g}, \vec{AB}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow p \cap g \text{ не пусто}$$

□

2. Определить точку B симметричную точке $A(0, -4, -7)$ относительно плоскости $p: x + 3y - 2z + 1 = 0$

$$2x - y + z - 3 = 0$$

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -5, -7)$$

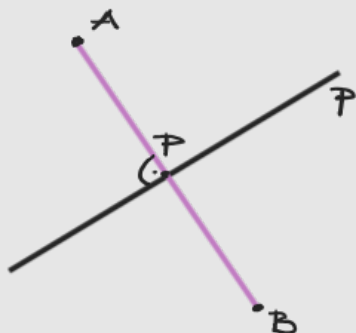
$$x = 0: 3y - 2z + 1 = 0$$

$$-y + z - 3 = 0 \quad \cdot 3 \Rightarrow z - 3 = 0$$

$$\Rightarrow z = 3$$

$$\Rightarrow y = 5$$

$$\text{т.е. } (0, 5, 3) \in p$$



$$\leadsto \vec{p}: \frac{x}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-8}{-7}$$

Дакле, произволна тачка $P \in p$ је облика $(t, -5t+5, -7t+8)$, $t \in \mathbb{R}$
 Ми тражимо $P \in p$ т.д. $AP \perp \vec{p}$:

$$AP \perp p \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \vec{p} = 0 \Leftrightarrow t + 25t - 45 + 49t - 65 = 0$$

$$(t, -5t+5, -7t+8) \quad 75t = 150 \Leftrightarrow t = 2$$

$$\leadsto P(2, -5, -6)$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB} \rightarrow P - A = B - P$$

$$\Rightarrow B = 2P - A = (4, -10, -12) - (0, -4, -7)$$

$$= (4, -6, -5)$$

□

3. Показати да се праве $p: \begin{cases} x-y-z-7=0 \\ 3x-4y-11=0 \end{cases}$ и $g: \begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$ секу и одредити јединичну равни која их садржи.

$$\vec{p} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (-4, 3, -1)$$

$$\vec{g} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, -1)$$

Тражимо тачку са праве p :

$$x=1: -y-z-6=0$$

$$-4y=8 \Rightarrow y=-2$$

$$\leadsto P(1, -2, -4) \in p$$

Тражимо тачку са праве g :

$$x=0: 2y-z-1=0$$

$$y+1=0 \Rightarrow y=-1$$

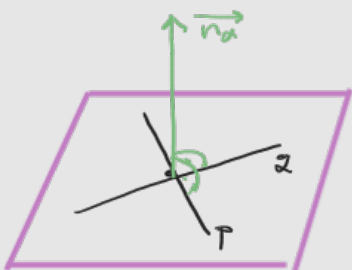
$$\leadsto Q(0, -1, -3) \in g$$

$$\vec{p} \cdot \vec{g} = 0 \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{g}$$

$$\vec{PQ} = (-1, 1, 1)$$

$$[\vec{p}, \vec{g}, \vec{PQ}] = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{+}{=} 0 \Rightarrow p \text{ и } g \text{ се секу}$$

Иска је α тражена равна:



$$\vec{n}_\alpha = \vec{p} \times \vec{g} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (2, -5, 7)$$

Свака од тачака права p и g припада α ;

узмимо нпр. Q :

$$\alpha: 2x - 5(y+1) + 7(z+3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y + 7z + 16 = 0$$

□