

СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \text{систем од } m \text{ линеарних једначина са} \\ \text{ } n \text{ непознатих } x_1, \dots, x_n$$

$b_1, \dots, b_m$ - слободни чланови, a_{ij} - коефицијенти система

$b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0 \Rightarrow$ систем је **хомоген**, иначе је **нехомоген**

• уређена n -торка $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ је решење система линеарних једначина ако за све $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ важи $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$

• систем може да буде **одређен** (има тачно једно решење), **неодређен** (има више од једног решења) или **немогућ / нерешив** (нема решења)

• два система линеарних једначина су **еквивалентни** ако имају једнаке скупове решења, тј. решење једног система је уједно и решење другог и обрнуто.

деф: **Елементарне трансформације** СЛЈ су

(1) замена места према једначинама

(2) множење једначине бројем различитим од нуле и додавање другој

(3) множење једначине бројем различитим од нуле

Т: Применом елементарних трансформација на СЛЈ добија се њему еквивалентан СЛЈ.

* ГАУСОВ ПОСТУПАК ЕЛИМИНАЦИЈЕ

ИДЕЈА: свођење СЛЈ применом елементарних трансформација на њему еквивалентан СЛЈ тако да се број непознатих по једначинама смањује

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Пн. $a_{11} \neq 0$; ако је $a_{11} = 0$, заменимо места првој и i -тој једначини у којој је $a_{i1} \neq 0$

$\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}} \right)$ $\left(-\frac{a_{m1}}{a_{11}} \right)$

На овај начин добијамо систем:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\begin{array}{l} a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)} \end{array}$$

(3) добијемо систем облика

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}$$

$\vdots$

$$a_{rn}^{(r-1)}x_n + \dots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}$$

$$0 = 0$$

$\vdots$

$$0 = 0$$

Овај систем је неопређен

Понављамо исти поступак; можда су

3 случаја:

(1) добијемо нерешив систем, у ком случају је и почетни систем нерешив

(2) добијемо систем облика

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}$$

$\vdots$

$$\underline{m=n}$$

$$a_{nn}^{(r-1)}x_n = b_n^{(r-1)}$$

Овакв систем се назива троугаони и има јединствено решење

① Решити систем

$$\begin{array}{rcl} x + 2y - 4z = -4 & /(-5) & \\ 5x + 11y - 21z = -22 & & \\ \hline 3x - 2y + 3z = 11 & & \\ \hline x + 2y - 4z = -4 & & \\ y - z = -2 & / \cdot 8 & \\ -8y + 15z = 23 & & \\ \hline x + 2y - 4z = -4 & & \\ y - z = -2 & & \\ 7z = 7 & & \end{array}$$

$$\stackrel{(3)}{\Rightarrow} z = 1 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} y = -2 + 1 = -1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x = -4 + 4 + 2 = 2$$

→ Систем има јединствено решење (2, -1, 1)

② Решити систем

$$\begin{array}{rcl} x + 5y - 13z = 3 & /(-3) & \\ 3x - y + 5z = 2 & & \\ \hline 2x + 2y - 4z = 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 x + 5y - 13z & = & 3 \\
 -16y + 44z & = & -7 \quad / \cdot (-\frac{1}{2}) \\
 -8y + 22z & = & -5 \\
 \hline
 x + 5y - 13z & = & 3 \\
 -16y + 44z & = & -7 \\
 \hline
 0 & = & -\frac{3}{2}
 \end{array}$$

(*) $\Rightarrow$ $\text{нет решения} \Rightarrow \text{СЛС} \text{ не имеет решения}$

3.

$$\begin{array}{rcl}
 2x + 5y - 8z & = & 4 \\
 3x + 8y - 13z & = & 7 \\
 x + 2y - 3z & = & 1 \\
 \hline
 x + 2y - 3z & = & 1 \\
 3x + 8y - 13z & = & 7 \quad -3 \\
 2x + 5y - 8z & = & 4 \quad -2 \\
 \hline
 x + 2y - 3z & = & 1 \\
 2y - 4z & = & 4 \\
 y - 2z & = & 2 \quad / (-2) \\
 \hline
 x + 2y - 3z & = & 1 \\
 y - 2z & = & 2 \\
 \hline
 0 & = & 0
 \end{array}$$

$$z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow y = 2z + 2 = 2\alpha + 2$$

$$x = 1 - 2y + 3z = 1 + 3\alpha - 4\alpha - 4 = -\alpha - 3$$

След $\alpha \in \mathbb{R}$ генерирует решения! Слн снх решения $\{(-\alpha, -3, 2\alpha + 2, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

4. Решить систему

$$\begin{array}{rcl}
 2x - 5y + 3z - 4t + 2u & = & 4 \\
 3x - 7y + 2z - 5t + 4u & = & 9 \\
 5x - 10y - 5z - 4t + 7u & = & 22 \\
 \hline
 2x - 5y + 3z - 4t + 2u & = & 4 \\
 \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}z + t + u & = & 3 \quad / (-5) \\
 \frac{5}{2}y - \frac{25}{2}z + 6t + 2u & = & 12
 \end{array}$$

Всего 5 переменных и 3 уравнения $\Rightarrow$ ожидаемо или бесконечно много решений или нет решений

$$t - 3u = -3$$

6. $x + y + z = \alpha$
 $x + \alpha y + \alpha^2 z = \alpha^2$
 $x + \alpha^2 y + \alpha^4 z = \alpha^4$

 $x + y + z = \alpha$
 $(\alpha - 1)y + (\alpha^2 - 1)z = \alpha^2 - \alpha$
 $(\alpha^2 - 1)y + (\alpha^4 - 1)z = \alpha^4 - \alpha$

$$\begin{array}{rcl}
 x + y + z & = & \alpha \\
 (\alpha-1)y + (\alpha^2-1)z & = & \alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha-1) \quad / \cdot (-\alpha+1) \\
 (\alpha-1)(\alpha+1)y + (\alpha^4-1)z & = & \alpha^4 - \alpha = \alpha(\alpha^3-1)
 \end{array}$$

попр. Jacobson $\alpha+1 \neq 0$
 $\alpha = -1 \leadsto \text{случай } 3^\circ$

$$x + y + z = \alpha$$

$$(\alpha-1)y + (\alpha^2-1)z = \alpha(\alpha-1)$$

$$((\alpha^2-1)(\alpha^2+1) - (\alpha+1)(\alpha^2-1))z = \alpha(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1) - \alpha(\alpha-1)(\alpha+1)$$

$$(\alpha^2-1)(\alpha^2+1 - \alpha-1)$$

$$= \alpha(\alpha-1)(\alpha^2 + \alpha + 1 - \alpha - 1)$$

$$\alpha(\alpha^2-1)(\alpha-1)$$

$$= \alpha^3(\alpha-1)$$

$$\alpha(\alpha-1)^2(\alpha+1)$$

$$\leadsto x + y + z = \alpha$$

$$(\alpha-1)y + (\alpha^2-1)z = \alpha(\alpha-1)$$

$$\alpha(\alpha-1)^2(\alpha+1)z = \alpha^3(\alpha-1)$$

$$\begin{array}{l}
 1^\circ \alpha \neq 0, \pm 1 \leadsto \left. \begin{array}{l} z = \frac{\alpha^3(\alpha-1)}{\alpha(\alpha-1)^2(\alpha+1)} = \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)(\alpha+1)} \\ \leadsto y = \dots = -\frac{\alpha}{\alpha-1} \\ x = \frac{\alpha^3}{(\alpha-1)(\alpha+1)} \end{array} \right\} \text{ЕДИНСТВЕННО РЕШЕНИЕ}
 \end{array}$$

$$2^\circ \alpha = 0: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} y = -\beta, \beta \in \mathbb{R} \\ z = -\beta \\ x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow S = \{(0, \beta, -\beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$3^\circ \alpha = -1: \begin{cases} x + y + z = -1 \\ -2y = 2 \\ 0 = 2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{нет решения} \end{array} \right.$$

$$4^\circ \alpha = 1: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x = \beta \\ y = \gamma \\ z = 1 - \beta - \gamma \end{array} \right. \Rightarrow S = \{(\beta, \gamma, 1 - \beta - \gamma) \mid \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

7. y зависимости от $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ решить систему:

$$\begin{array}{rcl}
 \boxed{\alpha}x + y + \beta z & = & 1 \\
 \boxed{x} + \alpha y + \beta z & = & 1 \quad / \cdot (-\alpha) \quad / \cdot (-1) \\
 \boxed{x} + y + \alpha\beta z & = & \beta
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \alpha = 0: & & \\
 y + \beta z & = & 1 \\
 x + \beta z & = & 1 \quad \nearrow - \\
 \hline
 x + y & = & \beta \\
 x + y & = & \beta \\
 x + \beta z & = & 1 \\
 y - x & = & 0 \Rightarrow x = y
 \end{array} \quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \nearrow \\ \nearrow \end{array} \quad x - y = \frac{\beta}{2}$$

$$x + \alpha y + \beta z = 1$$

$$(1-\alpha)y + \beta(1-\alpha)z = 1-\alpha$$

$$(1-\alpha)y + \beta(\alpha-1)z = \beta-1$$

$$x + \alpha y + \beta z = 1$$

$$(1-\alpha)y + \beta(\alpha-1)z = \beta-1$$

$$\underbrace{(1-\alpha^2 + (1-\alpha))y}_{(1-\alpha)(2+\alpha)} = \beta-1 \quad (3)$$

$$\beta z = 1-x = 1 - \frac{\beta}{2}$$

$$(1) \beta = 0 \rightarrow 0 = 1 \quad \text{система не имеет решения}$$

$$(2) \beta \neq 0 \quad \text{система имеет единственное решение}$$

$$\left(\frac{\beta}{2}, \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\beta}{2} \right), \frac{\beta}{2} \right) //$$

1° $\alpha \neq 1, -2$:

$$(3) \rightarrow y = \frac{\beta-1}{(1-\alpha)(\alpha+2)}$$

$$(2): \beta(\alpha-1)z = \beta-1 - (1-\alpha)y = \beta-1 - (1-\alpha) \cdot \frac{\beta-1}{(1-\alpha)(\alpha+2)}$$

$$= \frac{(\beta-1)(\alpha+2) - \beta+1}{\alpha+2}$$

$$= \frac{\beta\alpha + 2\beta - \alpha - 2 - \beta + 1}{\alpha+2}$$

$$= \frac{\alpha\beta + \beta - 2}{\alpha+2} \quad / : (\alpha-1) \neq 0 ?$$

$$\Rightarrow \beta z = \frac{\alpha\beta + \beta - 2}{(\alpha+2)(\alpha-1)}$$

1.1° $\beta \neq 0$: $z = \frac{\alpha\beta + \beta - 2}{(\alpha+2)(\alpha-1)\beta}$

$$x = 1 - \alpha y - \beta z = 1 - \frac{\alpha\beta - \alpha^2}{(1-\alpha)(\alpha+2)} - \frac{\alpha\beta + \beta - 2}{(\alpha+2)(\alpha-1)}$$

$$= \frac{(\alpha+2)(\alpha-1) + \alpha\beta - \alpha^2 - \alpha\beta - \beta + 2}{(\alpha-1)(\alpha+2)}$$

$$= \frac{\alpha^2 + \alpha - 2 + \alpha\beta - \alpha^2 - \alpha\beta - \beta + 2}{(\alpha-1)(\alpha+2)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\alpha - \beta}{(\alpha-1)(\alpha+2)}$$

1.2° $\beta = 0$: (2): $0 = \frac{-2}{(\alpha+2)(\alpha-1)} \quad \nrightarrow \text{система не имеет решения}$

2° $\alpha = 1$: $x + y + \beta z = 1$

$$0 = \beta - 1$$

$$0 = \beta - 1 \quad \text{обычно рассуждают}$$

2.1° $\beta \neq 1 \rightarrow \text{не имеет решения}$

2.2° $\beta = 1$: $x + y + z = 1$
 $0 = 0$

→ потребујам 2 параметра, нпр. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$y = \lambda, z = \mu \Rightarrow x = 1 - \lambda - \mu$$

$$S = \left\{ (1 - \lambda - \mu, \lambda, \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$3^\circ \quad \alpha = -2: \quad x - 2y + \beta z = 1$$

$$3y - 3\beta z = \beta - 1$$

$$0 = \beta + 2$$

$$3.1^\circ \quad \beta \neq -2 \rightarrow \text{нема решења}$$

$$3.2^\circ \quad \beta = -2: \quad x - 2y - 2z = 1$$

$$3y + 6z = -3$$

$$0 = 0$$

$$\leadsto y = \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \frac{1}{6}(-3 - 3\lambda) = -\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}$$

$$x = 1 + 2z + 2y \\ = 1 - 1 - \lambda + 2\lambda = \lambda$$

$$\leadsto S = \left\{ (\lambda, \lambda, -\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

* МАТРИЦЕ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \leadsto \text{матрица } m \times n, a_{ij} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

(Note: In the original image, a blue arrow points to the first row with the label "Врста" and a green arrow points to the first column with the label "Колонa")

$M_{mn}(\mathbb{R}(\mathbb{C}))$ - скуп свих матрица реда $m \times n$ над $\mathbb{R}/\mathbb{C}$

$m = n \rightarrow$ матрица је квadratна, реда n ; скуп таквих означавамо са $M_n(\mathbb{R}(\mathbb{C}))$

* На скупу $M_{mn}(\mathbb{R}(\mathbb{C}))$ имамо дефинисане операције сабирања и множења скаларом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

обе димензије морају
бити исте!

МНОЖЕЊЕ МАТРИЦА: Нека је A матрица реда $m \times n$ и B матрица реда $n \times k$.
Тада је $C = AB$ матрица реда $m \times k$, са коефицијентима $c_{ij} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} \cdot b_{\ell j}$

множимо i -ту врсту A са
 j -том колоном B

* неутрал за сабирање је нула матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

* неутрал за множење је јединична матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} =: I$

пример: Израчунати:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

3×2 2×2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ 21 & -9 \\ 31 & -15 \end{pmatrix}$$

3×2

$$(b) \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

множење ових матрица
није дефинисано!
(нису одговарајуће дим)

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

3×2 2×3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 8 \\ 3 & -3 & 0 \\ 8 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

3×2 3×3

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}$$

2×2

Видимо да множење матрица није комутативно! ∇

* транспонована матрица матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ је матрица

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица у којој су замењене врсте и колоне

НЕКЕ ОСОБИНЕ: (1) $(A+B)^T = A^T + B^T$

$$(2) (\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$(3) (AB)^T = B^T A^T$$

① Нeka је $a \in \mathbb{C}$ и $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & a \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$. у зависности од параметра A решити једначину $Ax + 2x + 4A$ у скупу $M_3(\mathbb{C})$.

РЕШЕЊЕ: I НАЧИН:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} \text{ — убацујемо у једначину:}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & a \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 12 & 2x_2 + 4 & 2x_3 - 4 \\ 2x_4 + 8 & 2x_5 + 20 & 2x_6 + 4a \\ 2x_7 + 4 & 2x_8 + 4a & 2x_9 + 20 \end{pmatrix}$$

→ СЛЈ са 9 једначина и 9 непознатих...

II НАЧИН: $2Ix$

$$Ax - 2x = 4A$$

$$(A - 2I)x = 4A$$

$$x = (A - 2I)^{-1} \cdot 4A$$

АКО ПОСТОЈИ
ИНВЕРЗ!

* МАТРИЦА A ЈЕ ИНВЕРТИБИЛНА
АКО ПОСТОЈИ МАТРИЦА A^{-1} т.д.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

↑
ИНВЕРЗ МАТРИЦЕ A

НАПОМЕНА: Видимо да ове има смисла посматрати само квадратне матрице

② Нeka је дата матрица $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Одредити све инвертибилне матрице $A \in M_2(\mathbb{C})$ т.д. важи $A^3 = A^2B - 3A^2$.

РЕШЕЊЕ: $A^{-1} | A^3 = A^2B - 3A^2$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot A^2 = \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot A \cdot B - 3 \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot A$$

$$A^{-1} | A^2 = AB - 3A = A(B - 3I)$$

$$A = B - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Дали постоји A^{-1} ? Не знамо још увек ефикасан начин за тражење инверзне матрице, али можемо да покушамо поступно да га израчунамо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \rightarrow b=-d \\ 2a+3c=0 \\ 2b+3d=1 \end{cases}$$

$$d=1 \Rightarrow b=-1$$

$$c=-2 \Rightarrow a=3$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

• ДЕТЕРМИНАНТА

$\det(A)$ означавамо и тако што уместо $(\cdot)$ пишемо $| \cdot |$ у запису матрице A

$\det: M_n(\mathbb{R}(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ пресликује са особинама:

$$(1) \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1i} + a_{1i}'' & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2i} + a_{2i}'' & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{ni} + a_{ni}'' & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1i}' & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2i}' & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{ni}' & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1i}'' & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2i}'' & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{ni}'' & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & d a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & d a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & d a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = d \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Зачем мена две
колоне мена знак
детерминанте!

$$(4) \det(I) = 1$$

* Испоставља се да постоји јединствено овакво пресликовање!

* ДЕТЕРМИНАНТЕ У МАЛИМ ДИМЕНЗИЈАМА:

$$(1) n=1: |a| = a$$

$$(2) n=2: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$(3) n=3: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

САПУСОВО
ПРАВИЛО

* Особине детерминанте:

(1) $\det A = \det A^T$ (дакле, у самој деф. детерминанте свака рет колону можемо заменити са вртом)

(2) ако матрица A има две исте или пропорционалне колоне (врте), њена детерминанта је нула. Специјално, ако матрица има нула колону (врту), њена детерминанта је нула.

(3) као последицу претходне особине добијемо да скалирање једне колоне (врте) и додавање другој не мења вредност детерминанте, тј. важи:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} + \lambda a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} + \lambda a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & \dots & a_{ni} + \lambda a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{ni} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(4) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

(5) **Бине - Кошијева Т**: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

(6) детерминанта горње (доње) троугаоне матрице

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Специјално, исто важи за дијагоналне матрице! ▽

(7) **МИНОР** $\hat{A}_{ij}$ матрице $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ добијемо тако што из A избацимо

i -ту врту и j -ту колону:

$$\hat{A}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$A_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det(\hat{A}_{ij})$ - **КОФАКТОР** матрице A

Лапласов развој по i -тој врти матрице A : $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$
(аналогно пролази за i -ту колону)

Пример: Израчунати вредност детерминанте

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

I начин: Преко Сарусовог правила

II начин: ИДЕЈА: Направити што више нула у једној врсти (колони) и затим применити Лапласов развој по тој врсти (колони)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 3 & -5 & -11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -11 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -11 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -5 & -11 \end{vmatrix} = 55 - 5 = 50$$

T: Матрица A је инвертибилна $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
Како наћи инверз?

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

деф: Нека је $A \in M_n(\mathbb{R}(\mathbb{C}))$. Матрицу адјунгованом матрицом матрице A и пишемо $\text{adj } A$.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \text{ зовемо}$$

КОФАКТОР A_{ij} се налази на позицији (j,i) ▽

Коначно: $\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A$

пример: Вратимо се на задатак ②: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^{-1} = ?$

$$\det A = 3 - 2 = 1 \neq 0! \Rightarrow \text{постоји инверз}$$

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

③ Нека су дате матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

у скупу $M_3(\mathbb{R})$ решити једначину $(AX^{-1})^T = (B^T X^T)^{-1} + C^{-1}$

РЕШЕЊЕ: $(AX^{-1})^T = (B^T X^T)^{-1} + C^{-1}$

$(X^{-1})^T A^T = (X^T)^{-1} (B^T)^{-1} + C^{-1}$

$X^T \cdot (X^T)^{-1} A^T = (X^T)^{-1} (B^T)^{-1} + C^{-1}$

$A^T = (B^T)^{-1} + X^T C^{-1}$

$X^T C^{-1} = A^T - (B^T)^{-1} = (A - B^{-1})^T \quad \text{пјер је } (X^{-1})^T = (X^T)^{-1}?$

$X^T = (A - B^{-1})^T \cdot C$

$\Rightarrow X = C^T \cdot (A - B^{-1})$

$X^T \cdot (X^{-1})^T = (X^{-1} \cdot X)^T = I^T = I$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 4 - 1 = 1$$

$$\text{adj } B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det B} \text{adj } B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A - B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^T \cdot (A - B^{-1})^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -6 & 6 \\ 7 & -1 & 2 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

* СЛЈ $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$ можемо матрично записати као

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$

$AX = B$

$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

* Јколикo матрица A има инверз (довољно је само левн инверз тј. $A^{-1}A = I$), претх. систем има јединствено решење $X = A^{-1}B$.

* Специјално, посматрајмо квадратни СЛЈ:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

уведимо ознаке: $\Delta := \det A =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$1 \leq i \leq n$$

$$\Delta_{x_i} :=$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

уместо коеф. уз x_i пишемо b_i

КРАМЕРОВО ПРАВИЛО:

(1) Ако је $\Delta \neq 0$, СЛЖ $*$ има јединствено решење $x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$, за $1 \leq i \leq n$

(2) Ако је $\Delta = 0$ и бар један од $\Delta_{x_i} \neq 0$, СЛЖ $*$ нема решења

(3) Ако је $\Delta = \Delta_{x_1} = \dots = \Delta_{x_n} = 0$, систем има нула или више од 1 решења

у овом случају Крамерово правило нам не даје конкретан одговор, па примењујемо неки од других метода (нпр. Гаусову елиминацију)

4. Решити СЛЖ $x + 2y - 4z = -4$

$$5x + 11y - 21z = -22$$

$$3x - 2y + 3z = 11$$

РЕШЕЊЕ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 11 & -21 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 2 & -8 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 7 \end{vmatrix} = 7$$

КРАМЕР (1)

СЛЖ има јединствено решење

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -4 \\ -22 & 11 & -21 \\ 11 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 11 & 1 \\ 7 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 5 & -22 & -21 \\ 3 & 11 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & 23 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 23 & 15 \end{vmatrix} = -7$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 5 & 11 & -22 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & -8 & 23 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 7 \end{vmatrix} = 7$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (2, -1, 1)$$

5.

$$x + 2y - 3z = -1$$

$$3x - y + 2z = 7$$

$$5x + 3y - 4z = 2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} \xrightarrow{2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -4 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 7 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 13 & -19 \\ 2 & 7 & -10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 13 & -19 \\ 7 & -10 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

КРАМЕР (2)

$\Rightarrow$ СЛЖ не имеет решения

6.

у зависимости от $\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ решить СЛЖ $(\alpha+1)x + y + z = 2-\alpha$

$$x + (\alpha+1)y + z = -2$$

$$x + y + (\alpha+1)z = \alpha$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{+} = \begin{vmatrix} \alpha+3 & \alpha+3 & \alpha+3 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = (\alpha+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = (\alpha+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 \cdot (\alpha+3)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2-\alpha & 1 & 1 \\ -2 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{+} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha+3 & \alpha+3 \\ -2 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix} = (\alpha+3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha+3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & \alpha+1 & -\alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \end{vmatrix} = -(\alpha+3) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -\alpha \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} = -\alpha(\alpha+3)(\alpha-2)$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \alpha+1 & 2-\alpha & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{+} = \begin{vmatrix} \alpha+3 & 0 & \alpha+3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha+1 \end{vmatrix} \xrightarrow{-} = \begin{vmatrix} \alpha+3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha \end{vmatrix} = -2\alpha(\alpha+3)$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} \alpha+1 & 1 & 2-\alpha \\ 1 & \alpha+1 & -2 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \xrightarrow{+} = \begin{vmatrix} \alpha+3 & \alpha+3 & 0 \\ 1 & \alpha+1 & -2 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \xrightarrow{-} = \begin{vmatrix} \alpha+3 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & -2 \\ 1 & 0 & \alpha \end{vmatrix} \\ = (\alpha+3) \begin{vmatrix} \alpha & -2 \\ 0 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2(\alpha+3)$$

$$1^\circ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 0\} \Rightarrow \Delta \neq 0$$

$$\leadsto \text{СЛС има јединствено решење } (x, y, z) = \left(\frac{2-\alpha}{\alpha}, -\frac{2}{\alpha}, 1 \right)$$

$$2^\circ \alpha = -3 \Rightarrow \Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$$

$\leadsto$ морамо да применимо Гаусов поступак:

$$\begin{array}{rcl} -2x + y + z & = & 5 \\ x - 2y + z & = & -2 \\ \hline x + y - 2z & = & -3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & -2 \\ -3y + 3z & = & 1 \\ \hline 3y - 3z & = & -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{поново једначине!} \end{array}$$

$$\rightarrow y = \beta \in \mathbb{R} \rightarrow z = \frac{1}{3}(1+3\beta) = \beta + \frac{1}{3} \\ x = -2 + 2y - z = -2 + 2\beta - \beta - \frac{1}{3} = \beta - \frac{7}{3}$$

$$\leadsto S = \left\{ \left(\beta - \frac{7}{3}, \beta, \beta + \frac{1}{3} \right) \mid \beta \in \mathbb{R} \right\} - \text{Бесконечно много решења}$$

$$3^\circ \alpha = 0 \Rightarrow \Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0 \rightarrow \text{поново Гаус!}$$

$$x + y + z = 2$$

$$x + y + z = -2$$

$$x + y + z = 0$$

НЕМА РЕШЕЊА!

раније ратјен код Гаусовог поступка

ЗА ВЕЖБУ: Крамеровим правилом решити: $x + y + z = \alpha$

$$x + \alpha y + \alpha^2 z = \alpha^2$$

$$x + \alpha^2 y + \alpha^4 z = \alpha^4$$

7) Зависности од $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ решити СЛС

$$\alpha x + y + z = 4$$

$$x + \beta y + z = 3$$

$$x + 2\beta y + z = 4$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 2\beta & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 2\beta & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-1) \cdot \begin{vmatrix} \beta & 1 \\ 2\beta & 1 \end{vmatrix} = -\beta \cdot (\alpha-1)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & \beta & 1 \\ 4 & 2\beta & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & \beta-1 & 1 \\ 0 & 2\beta-1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & \beta-1 \\ 0 & 2\beta-1 \end{vmatrix} = 1-2\beta$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \alpha & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1-\alpha$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 4 \\ 1 & \beta & 3 \\ 1 & 2\beta & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 4-4\alpha \\ 1 & \beta & -1 \\ 1 & 2\beta & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2\beta \end{vmatrix} + (4-4\alpha) \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 2\beta \end{vmatrix} = 2\alpha\beta - 1 + \beta(4-4\alpha) = 4\beta - 2\alpha\beta - 1$$

$$1^\circ \alpha \neq 1: 1.1^\circ \beta \neq 0 \rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{2\beta-1}{\beta(\alpha-1)}, \frac{1}{\beta}, \frac{4\beta-2\alpha\beta-1}{(1-\alpha)\beta} \right)$$

$$1.2^\circ \beta = 0 \rightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_x = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{нема решења}$$

$$2^\circ \alpha = 1: \Delta = 0, \Delta_x = 1-2\beta, \Delta_y = 0, \Delta_z = 2\beta-1$$

$$2.1^\circ \beta \neq \frac{1}{2} \rightarrow \text{нема решења}$$

$$2.2^\circ \beta = \frac{1}{2}: \text{ГЛС} \rightarrow x+y+z=4$$

$$x + \frac{y}{2} + z = 3 \quad \begin{cases} -1 & \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

$$x+y+z=4 \quad x-y \Rightarrow z=2-y$$

$$\leadsto S = \{ (y, 2, 2-y) \mid y \in \mathbb{R} \}$$

* РАНГ МАТРИЦЕ

* ранг матрице = број линеарно независних колона (врећа)

$$\uparrow \text{rang } A = \text{rang } (A^T)$$

* елементарне трансформације не мењају ранг матрице!

8. Определить ранг матрицы

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang } A = 2$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad A &= \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ \\ \cdot 2 \end{matrix} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 14 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot (-1) \\ \cdot (-2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow \text{rang } A = 2
 \end{aligned}$$

 $\lambda \in \mathbb{R} :$

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{R}: \\ \text{(B)} \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & \lambda & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3 \\ 0 & \lambda-10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3} \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & -21 & \lambda+12 & 3 \\ 0 & \lambda-10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 0 & 9-3\lambda & \lambda-3 & 0 \\ 0 & \lambda-10 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & \lambda-10 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 9-3\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(r) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{- \\ -}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda^2-1 \\ 0 & \lambda^2-1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(\lambda+1)}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda^2-1 \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda-1)(\lambda+2) \end{pmatrix} \quad \lambda = -1: \quad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang } A = 3$$

упада у
своју јед.

1° $\lambda \neq 0, 1, -2: \text{rang } A = 3$

2° $\lambda = 0: \text{rang } A = 2$

3° $\lambda = 1: \text{rang } A = 1$

4° $\lambda = -2: \text{rang } A = 2$

T: $A \in M_n(\mathbb{R}(\mathbb{C}))$ је инвертибилна ако $\text{rang } A = n$.

* **КРОНЕКЕР - КАПЕЛИЈЕВА Т:**

Посматрајмо поново матрични запис СЛД $AX = B$, где је $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$,

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

← не мора бити квадратна!

означимо са A_p матрицу добијену додавањем колоне B матрици A :

$$A_p = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

← овакву матрицу зовемо
проширена матрица
система

Приметимо: $\text{rang } A_p \in \{\text{rang } A, \text{rang } A + 1\}$

T: (КРОНЕКЕР - КАПЕЛИ)

(1) $\text{rang } A = \text{rang } A_p = n \rightarrow$ систем има јединствено решење

(2) $\text{rang } A < \text{rang } A_p \Rightarrow$ систем нема решења

(3) $\text{rang } A = \text{rang } A_p < n \Rightarrow$ систем има бесконачно много решења

9) Решити СЛД

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 8z &= 8 \\ 4x + 3y - 9z &= 5 \\ 2x + 3y - 5z &= 7 \\ x + 2y - 7z &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_p &= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ \boxed{1} & 8 & -7 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 5 & -8 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-4 \\ -2 \\ -2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -29 & 19 & -39 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array} \right) \xrightarrow{-2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & -7 & 12 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & -13 & 9 & -17 \\ 0 & -11 & 6 & -16 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-7 \\ -5}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 9 & -13 & -17 \\ 0 & 6 & -11 & -16 \end{array} \right) \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 14 & 28 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } A_p = 3 (=n) \leadsto \text{СЛЗ има јединствено решење}$
 Како долазимо до тог решења?

$$x - 7z + 8y = 12$$

$$z - 3y = -5$$

$$7y = 14 \Rightarrow y = 2$$

$$x = 12 - 8y + 7z = 3$$

$$z = -5 + 3y = 1$$

$$\Rightarrow (x, y, z) = (3, 2, 1)$$

10. Нека је $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & -1 \\ \lambda & 6 & -2 \\ -1 & -3 & \lambda-1 \end{pmatrix}$

(a) Определити $\text{rang } A$ у зависности од $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) За $\lambda \in \{2, 3\}$ наћи A^{-1} (ако постоји)

$\lambda = 0:$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot 2}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{rang } A = 3$$

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & -1 \\ \lambda & 6 & -2 \\ -1 & -3 & \lambda-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-\lambda)} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & 6-\lambda(\lambda+1) & \lambda-2 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \\ 0 & -\lambda^2-\lambda+6 & \lambda-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \\ 0 & -(\lambda-2)(\lambda+3) & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$1^\circ \lambda = 2: A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang } A = 1$$

$$2^\circ \lambda \neq 2: A \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \\ 0 & -(\lambda-2)(\lambda+3) & \lambda-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \\ 0 & \lambda-2 & -(\lambda-2)(\lambda+3) \end{pmatrix} \downarrow -$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & -(\lambda-2)(\lambda+4) \end{pmatrix}$$

$$2.1^\circ \lambda = -4 \Rightarrow \text{rang } A = 2$$

$$2.2^\circ \lambda \neq -4 \Rightarrow \text{rang } A = 3 \leadsto \exists A^{-1} \quad \checkmark$$

(5) 33 БЖБГ

3А БЖБГ. (поро Т. Кронекер - Канони) $\exists$ зависимости от $a, b \in \mathbb{R}$ решить СЛС

$$x - 5t = 2$$

$$x + y - 5t = 4$$

$$2x - 5y + (a+2)z - 10t = -6$$

$$2x - y + (b-3)t = 1$$