

* КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ I ВРСТЕ

$$\int_C f(x,y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \|C'(t)\| dt$$

$$\|C'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

C -крива коју морамо да параметризујемо

$$C = C(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad a \leq t \leq b$$

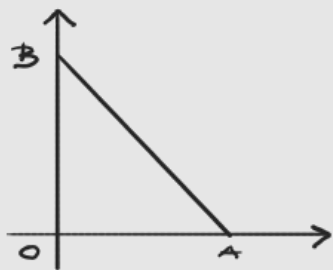
* НЕ ЗАВИСИ ОД СМЕРА ($\int_a^b = \int_b^a$, тј. није важна оријентација)

① Израчунати $\int_C z ds$, ако је C крива која има параметризацију
 $C: x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, \quad 0 \leq t \leq t_0$

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= \cos t - t \sin t \\ y'(t) &= \sin t + t \cos t \\ z'(t) &= 1 \end{aligned} \right\} \|C'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t - 2t \sin t \cos t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + 1} = \sqrt{2 + t^2}$$

$$\leadsto \int_C z ds = \int_0^{t_0} t \cdot \sqrt{2+t^2} dt = \left\{ \begin{aligned} u &= 2+t^2 \\ du &= 2t dt \end{aligned} \right\} \dots = \frac{1}{3} (\sqrt{(t_0^2+2)^3} - 2\sqrt{2})$$

② Израчунати $\int_C (x+y) ds$, где је C троугао са темецима $O(0,0)$, $A(1,0)$ и $B(0,1)$



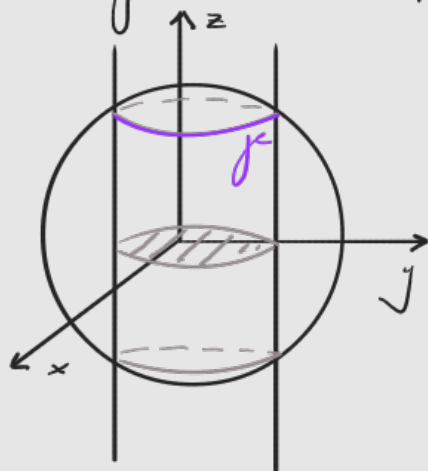
$$OA: x(t) = t, y(t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \leadsto \| (OA)' \| = 1$$

$$OB: x(t) = 0, y(t) = t \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \leadsto \| (OB)' \| = 1$$

$$AB: x(t) = t, y(t) = 1-t \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \leadsto \| (AB)' \| = \sqrt{2}$$

$$\int_C (x+y) ds = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{OB} = \int_0^1 t dt + \int_0^1 (t+1-t) \cdot \sqrt{2} dt + \int_0^1 t dt = 1 + \sqrt{2}$$

- ③ Израчунати $\int xyz \, ds$, ako je γ четвртina кружнице у I октанту
 дефинисана као γ пресек цилиндра $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ и сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



пресек цилиндра и сфере:

$$z^2 = R^2 - x^2 - y^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$$

$$\leadsto z = \pm \frac{R\sqrt{3}}{2}, \text{ нас занима } z = \frac{R\sqrt{3}}{2}!$$

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4} \leadsto x(t) = \frac{R}{2} \cos t$$

$$y(t) = \frac{R}{2} \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad \left(\frac{1}{4} \text{ круга}\right)$$

$$z(t) = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\leadsto x'(t) = -\frac{R}{2} \sin t$$

$$y'(t) = \frac{R}{2} \cos t$$

$$z'(t) = 0$$

$$\leadsto \|\gamma'\| = \sqrt{\frac{R^2}{4}(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \frac{R}{2}$$

$$\int_{\gamma} xyz \, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2}{4} \sin t \cos t \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R}{2} \, dt = \frac{R^4 \sqrt{3}}{32}$$

□

- ④ Израчунати $I = \int_{\gamma} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) \, ds$, где $\gamma: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $x, y > 0, a > 0$
 крива у I квадранту

параметризацја: $x(t) = a \cos^3 t$

$$, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y(t) = a \sin^3 t$$

$$(u \sin u \cos u > 0)$$

$$x'(t) = -3a \cos^2 t \cdot \sin t$$

$$y'(t) = 3a \sin^2 t \cdot \cos t$$

$$\leadsto \|\gamma'\| = \sqrt{9a^2(\sin^4 t \cos^4 t + \sin^4 t \cos^4 t)}$$

$$= \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} = 3a \sin t \cos t$$

$$\leadsto \int_{\gamma} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) \, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^{\frac{4}{3}} \cos^4 t + a^{\frac{4}{3}} \sin^4 t) \cdot 3a \sin t \cos t \, dt$$

$$= 3a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)^2}_1 - 2 \cos^2 t \sin^2 t) \cdot \sin t \cos t \, dt$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \sin t \\ du = \cos t \, dt \end{array} \right\} = \dots = a^{\frac{7}{3}}$$

□

* КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ II ВРСТЕ

* $\gamma(t)$ - крива у равни (све аналогно и ако је крива у простору)

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I$$

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3)$$

$$F(x, y) = (\underbrace{P(x, y), Q(x, y)}_{\text{вектор!}})$$

$$P: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_{\gamma} F(x, y) ds = \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

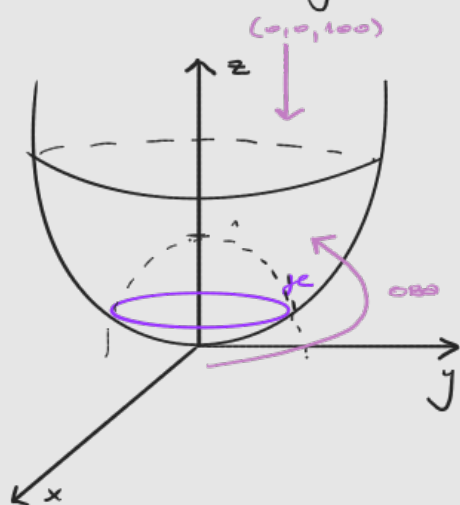
$$= \left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right., \quad a \leq t \leq b$$

* криволинијски интеграл II врсте зависи од оријентације!

$$= \int_a^b (P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)) dt$$

① Нека је $S_1: z = 1 - x^2$, $S_2: z = x^2 + y^2$ и $C = S_1 \cap S_2$ крива оријентисана супротно од казаљке на сату (математички позитиван смер!) у тачки $(0, 0, 100)$. Наћи $I = \int_C (y dx + z dy + x dz)$.

$$S_1 \cap S_2: \begin{cases} z = 1 - x^2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow 1 - x^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 2x^2 + y^2 = 1 \rightsquigarrow \text{ЕЛИПСА ЈЕ ПРЕСЕК}$$



Морамо да је параметризујемо:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ y(t) = \sin t \\ t \in [-\pi, \pi] \end{cases} \quad \begin{aligned} &\parallel a^2 x^2 + b^2 y^2 = 1 \\ &ax = \cos t \rightsquigarrow x = \frac{1}{a} \cos t \\ &by = \sin t \rightsquigarrow y = \frac{1}{b} \sin t \end{aligned}$$

ова параметризација се слаже са
задатом оријентацијом! Ако то није ажурај,
репараметризујемо криву или рачунамо минус
интеграл

$$z = 1 - x^2 \rightsquigarrow z(t) = 1 - \frac{\cos^2 t}{2}$$

$$x'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t$$

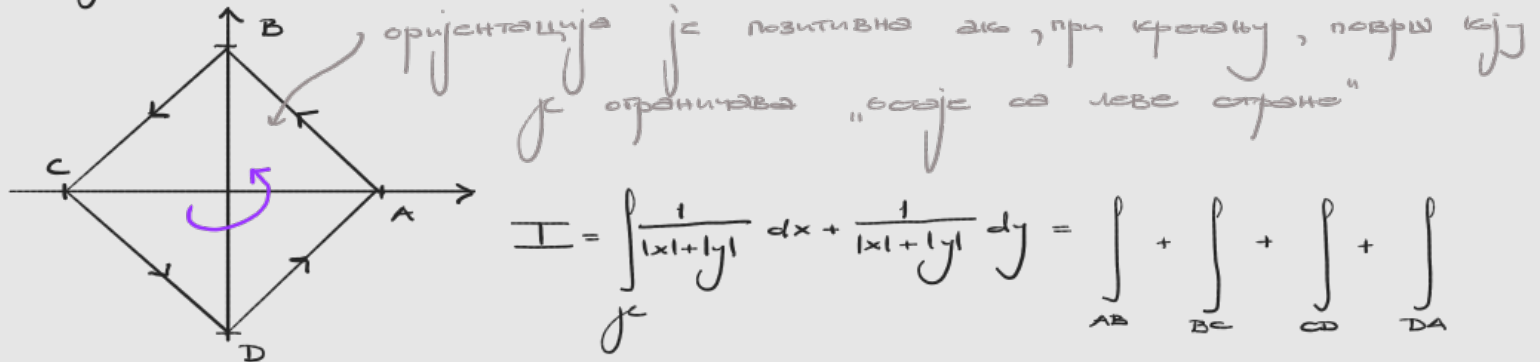
$$y'(t) = \cos t \quad z'(t) = \sin t \cos t$$

$$\leadsto I = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 t + \left(1 - \frac{\cos^2 t}{2}\right) \cdot \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \cdot \sin t \cos t \right) dt$$

= ...

□

② Израчунати интеграл по pozitivno orijentisanoj krivoj γ : $I = \int_{\gamma} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$,
 $\gamma: A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)$



parametrizacija: $AB: x(t) = t$ $BC: x(t) = t$ $CD: x(t) = t$ $DA: x(t) = t$

$$\begin{array}{llll} y(t) = 1-t & y(t) = t+1 & y(t) = -1-t & y(t) = t-1 \\ t \in [0,1] & t \in [-1,0] & t \in [-1,0] & t \in [0,1] \end{array}$$

najlakše je da samo parametrizujemo dužni, a da orijentaciju "korigujemo" menjanjem znaka ispred integrala

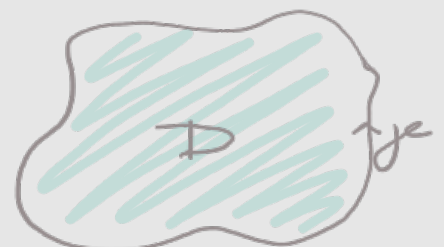
$$\begin{aligned} I &= - \int_0^1 \frac{1-1}{|t| + |1-t|} dt - \int_{-1}^0 \frac{1+1}{|t| + |t+1|} dt + \int_{-1}^0 \frac{1-1}{|t| + |-1-t|} dt + \int_0^1 \frac{1+1}{|t| + |t-1|} dt \\ &= -2 \int_{-1}^0 \frac{dt}{-t + t + 1} + 2 \int_0^1 \frac{dt}{t - t + 1} = 0 \end{aligned}$$

□

ГРИНОВА ТЕОРЕМА: Нека је $D \subseteq \mathbb{R}^2$ област ограничена део-по-део глатком кривом γ позитивне оријентације и $P, Q, \frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ постоје и непрекинути су на $\overline{D}$. Тада важи:

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

криволинијски интеграл II врсте

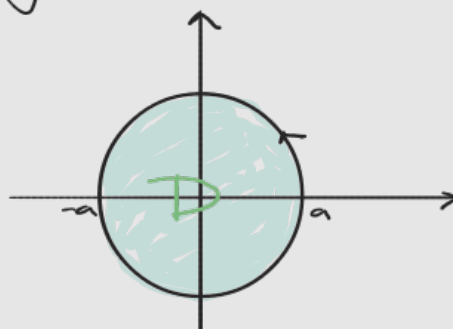


* ако је негативна оријентација - испред интеграла

③. Изračунати $\int_{\gamma} xy^2 dy - x^2 y dx$, $\gamma: x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, позитивно оријентисан

$$\begin{cases} P(x,y) = -x^2 y \\ Q(x,y) = xy^2 \end{cases} \text{ некр.}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2 \quad \text{некр.}$$



$$\leadsto I = \int_{\gamma} P dx + Q dy \stackrel{\text{Грин}}{=} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (y^2 + x^2) dx dy = \textcircled{*}$$

поларне коорд. $x = r \cos \theta$ $0 \leq r \leq a$
 $y = r \sin \theta$ $-\pi \leq \theta \leq \pi$
 $J = r$

$$\leadsto \textcircled{*} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a r^2 \cdot r dr d\theta = \frac{a^4}{2} \cdot \pi$$

II начин: без Гриневог Т, параметризујемо γ :

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = a \sin t \end{cases} \quad -\pi \leq t \leq \pi \quad \begin{cases} x'(t) = -a \sin t \\ y'(t) = a \cos t \end{cases} \quad \leadsto \|\gamma'\| = a$$

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} a (a^3 \sin^2 t \cos^2 t + a^3 \sin^2 t \cos^2 t) dt = \frac{a^4}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{2} \cdot \pi$$

□

④. Изračунати $\int_{\gamma} e^{-(x^2+y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$, γ : позитивно оријентисана кружница $x^2 + y^2 = R^2$.

$$\begin{aligned} P(x,y) &= e^{-(x^2+y^2)} \cdot \cos 2xy \leadsto \frac{\partial P}{\partial y} = -2y e^{-(x^2+y^2)} \cos 2xy - 2x e^{-(x^2+y^2)} \sin 2xy \\ Q(x,y) &= e^{-(x^2+y^2)} \cdot \sin 2xy \leadsto \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x e^{-(x^2+y^2)} \sin 2xy + 2y e^{-(x^2+y^2)} \cos 2xy \end{aligned}$$

Грин

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} e^{-(x^2+y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy) &\stackrel{\text{Грин}}{=} \iint_D 4y e^{-(x^2+y^2)} \cos 2xy dx dy \\ &= 4 \int_{-R}^R e^{-x^2} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y e^{-y^2} \cos 2xy dy \right) dx = 4 \int_{-R}^R e^{-x^2} \cdot 0 dx = 0 \end{aligned}$$

Непарна функција по y
на симетричном домену

□