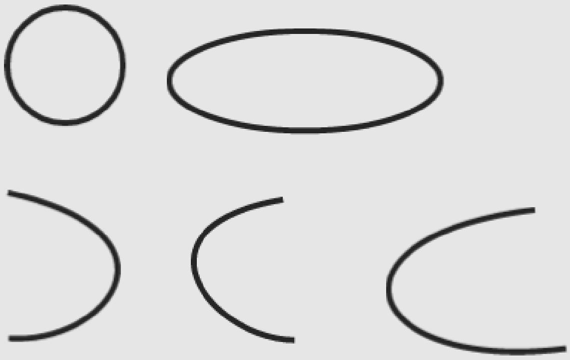
* Криве другог реда

$$\mathcal{K}: a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R}$, $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0$ (постоји бар 1 квадратни члан)

Скуп тачака $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ које задовољавају једначину називамо **кривом другог реда**

* Недегенерисане :



* Дегенерисане :

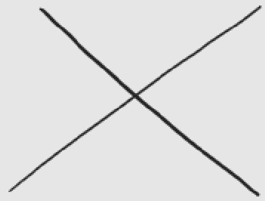
$\emptyset$

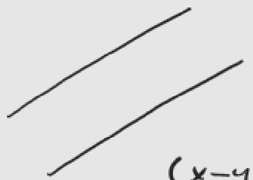
$x^2+y^2+1=0$

•

$x^2+y^2=0$

$y=0$

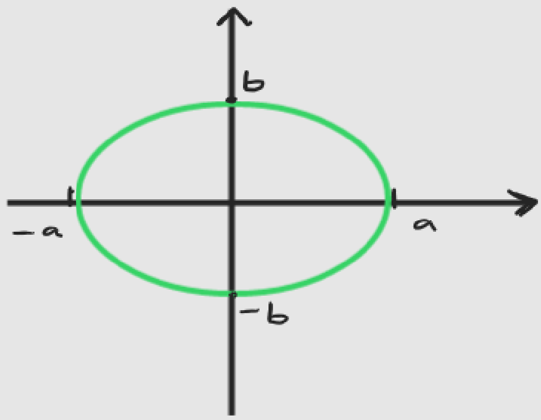




$(x-y)^2-4=0$

...

• Елипса

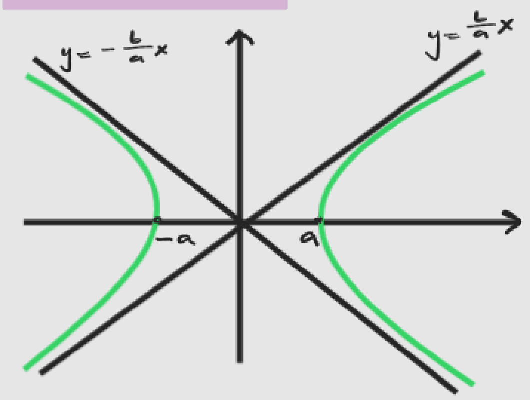


$$\boxed{\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

a, b – полуосе

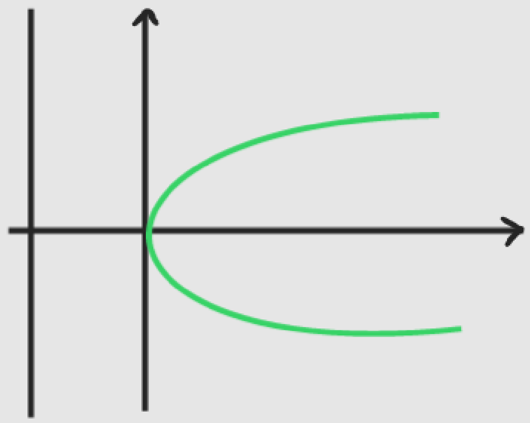
Специјално: за $a=b$ добијамо круг

* ХИПЕРБОЛА



$$\boxed{\mathcal{X}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

* ПАРАБОЛА



$$\boxed{\mathcal{P}: y^2 = 2px}, \quad p > 0$$

* Свођење криве II реда на канонски облик:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

тј. постоји мешовити члан

(1) $a_{12} \neq 0$ ⇝ крива је „искошена" у простору и да бисмо се решили овог члана хоћемо да је ротирамо за одговарајући угао θ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

старе координате

матрица ротације за θ

нове координате

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \cos\theta\, x_1' - \sin\theta\, x_2' \\ x_2 &= \sin\theta\, x_1' + \cos\theta\, x_2' \end{aligned}}$$

Да бисмо елиминисали мешовити члан треба узети угао θ т.д. $\boxed{\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}}$

(2) Поступком из дела (1) криву смо свели на облик

коеф. у овој једначини нису исти као у почетној!

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

КАНОНСКИ ОБЛИК

Даље, ову једначину желимо да трансформишемо у облик $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$ (тј. да елиминишемо линеарне чланове). То радимо на следећи начин:

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x = a_{11}\left(x^2 + 2\frac{a_{13}}{a_{11}}x\right) = a_{11}\left(x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{a_{13}}{a_{11}} + \left(\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}^2}\right)$$

$$= a_{11}\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}}$$

и аналогно: $a_{22}y^2 + 2a_{23}y = a_{22}\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 - \frac{a_{23}^2}{a_{22}}$

⇝ можемо да транслирамо x и y координате:
$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x + \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ y' &= y + \frac{a_{23}}{a_{22}} \end{aligned}}$$

1. Свести на канонски облик следеће криве другог реда:

(1) $x^2 + y^2 - xy - 3x - 1 = 0$

(2) $4x^2 - 4xy + y^2 + x + 12y + 6 = 0$

(3) $7x^2 - 8xy + y^2 - 26x + 20y + 28 = 0$

(1) $x^2 + y^2 - xy - 3x - 1 = 0$

$a_{11} = 1,\ a_{22} = 1,\ a_{12} = -\frac{1}{2},\ a_{13} = -\frac{3}{2},\ a_{23} = 0,\ a_{33} = -1$

$$\rightsquigarrow \operatorname{ctg}(2\theta) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = 0 \implies \cos(2\theta) = 0 \implies 2\theta = \frac{\pi}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\rightsquigarrow x = \cos\theta x' - \sin\theta y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

$$y = \sin\theta x' + \cos\theta y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

$$\frac{1}{2}(x' - y')^2 + \frac{1}{2}(x' + y')^2 - \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) - \frac{3\sqrt{2}}{2}x' + \frac{3\sqrt{2}}{2}y' - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}x'^2 - \cancel{x'y'} + \frac{1}{2}y'^2 + \frac{1}{2}x'^2 + \cancel{x'y'} + \frac{1}{2}y'^2 - \frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x' + \frac{3\sqrt{2}}{2}y' - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}x'^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}x' + \frac{3}{2}y'^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}y' - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(x'^2 - 2\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}x' + \frac{9}{2}\right) - \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\left(y'^2 + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{2}\Big(\underbrace{x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}}_{u}\Big)^2 + \frac{3}{2}\Big(\underbrace{y' + \frac{\sqrt{2}}{2}}_{v}\Big)^2 - 4 = 0$$

$$\boxed{\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{\frac{2}{3}} = 4}$$ ⇝ ЕЛИПСА!

(2) $4x^2-4xy+y^2+x+12y+6=0$ (*)

$a_{11}=4,\ a_{22}=1,\ a_{12}=-2,\ a_{13}=\frac{1}{2},\ a_{23}=6,\ a_{33}=6$

$$\operatorname{ctg}2\theta=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}=\frac{4-1}{-4}=-\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}2\theta=-\frac{4}{3}=\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}\quad\to\quad \operatorname{tg}\theta=-\frac{1}{2},\qquad \operatorname{tg}\theta=2$$ – нпр. узмемо ово

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2\Rightarrow \sin\theta=2\cos\theta$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ \rightsquigarrow\ 5\cos^2\theta=1$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta=\frac{1}{5}\ \rightsquigarrow\ \boxed{\cos\theta=\frac{1}{\sqrt5},\quad \sin\theta=\frac{2}{\sqrt5}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}x&=\frac{1}{\sqrt5}x'-\frac{2}{\sqrt5}y'\\ y&=\frac{2}{\sqrt5}x'+\frac{1}{\sqrt5}y'\end{aligned}}$$

$$\rightsquigarrow (*)\iff (2x-y)^2+x+12y+6=0$$

$$2x-y=\cancel{\frac{2}{\sqrt5}x'}-\frac{4}{\sqrt5}y'-\cancel{\frac{2}{\sqrt5}x'}-\frac{1}{\sqrt5}y'=-\sqrt5 y'$$

$$\rightsquigarrow 5y'^2+\frac{1}{\sqrt5}x'-\frac{2}{\sqrt5}y'+\frac{24}{\sqrt5}x'+\frac{12}{\sqrt5}y'+6=0$$

$$5y'^2+\frac{25}{\sqrt5}x'+\frac{10}{\sqrt5}y'+6=0$$

$$5\left(y'^2+2\cdot\frac{1}{\sqrt5}y'+\frac{1}{5}\right)-1+\frac{25}{\sqrt5}x'+6=0$$

$$5\Big(\underbrace{y'+\frac{1}{\sqrt5}}_{v}\Big)^2+5\sqrt5\Big(\underbrace{x'+\frac{1}{\sqrt5}}_{u}\Big)=0$$

$$\Rightarrow 5v^2=-5\sqrt5 u$$

$$\boxed{v^2=-\sqrt5 u}\ \rightsquigarrow\ \begin{aligned}v'&=v\\ u'&=-u\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{v'^2=\sqrt5 u'}$$ ⇝ ПАРАБОЛА!

(3) $7x^2-8xy+y^2-26x+20y+28=0$

$a_{11}=7,\ a_{12}=-4,\ a_{22}=1,\ a_{13}=-13,\ a_{23}=10,\ a_{33}=28$

$$\operatorname{ctg}2\theta=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}=\frac{6}{-8}=-\frac{3}{4}\Rightarrow \operatorname{tg}2\theta=-\frac{4}{3}$$

(као у (2)) $\Rightarrow$ $$\boxed{\begin{aligned}x&=\frac{1}{\sqrt5}x'-\frac{2}{\sqrt5}y'\\ y&=\frac{2}{\sqrt5}x'+\frac{1}{\sqrt5}y'\end{aligned}}$$

$$7\left(\frac{x'^2}{5}-\cancel{\frac{4}{5}x'y'}+\frac{4}{5}y'^2\right)-8\left(\frac{2}{5}x'^2+\cancel{\frac{1}{5}x'y'}-\cancel{\frac{4}{5}x'y'}-\frac{2}{5}y'^2\right)+\frac{4}{5}x'^2+\cancel{\frac{4}{5}x'y'}+\frac{1}{5}y'^2$$

$$-\frac{26}{\sqrt5}x'+\frac{52}{\sqrt5}y'+\frac{40}{\sqrt5}x'+\frac{20}{\sqrt5}y'+28=0$$

$$-x'^2+9y'^2+\frac{14}{\sqrt5}x'+\frac{72}{\sqrt5}y'+28=0$$

$$-\left(x'^2 - 2\cdot\frac{7}{\sqrt{5}}x' + \frac{49}{5}\right) + \frac{49}{5} + 9\left(y'^2 + 2\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}y' + \frac{16}{5}\right) - \frac{144}{5} + 28 = 0$$

$$-(\underbrace{x - \frac{7}{\sqrt{5}}}_{u})^2 + 9(\underbrace{y + \frac{4}{\sqrt{5}}}_{v})^2 + 9 = 0 \quad / : (-9)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{\frac{u^2}{9} - v^2 = 1} \rightsquigarrow \text{Хипербола!}$$