

деф: Нека је $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен и $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$. Ако постоји и крајњи је $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i+h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$, кажемо да f има парцијални извод по i -тој координати у тачки a и пишемо $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ или $f'_{x_i}(a)$.

③ Нека је $f(x, y) = x + (y-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}$. Наћи парцијални извод по 1. координати у тачки $(a, 1)$.
 $\frac{\partial f}{\partial x}(a, 1) = ?$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, 1) - f(a, 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a+h-a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

деф: Нека је $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен и $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$. За функцију f кажемо да је диференцијабилна у тачки a ако се њен прираштај $\Delta f(a, h) := f(a+h) - f(a)$ може представити у облику $\Delta f(a, h) = L_a h + o_a(h)$, где је $L_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ линеарно пресликавање ($L_a(\alpha x + \beta y) = \alpha L_a(x) + \beta L_a(y)$) + свако линеарно пресликавање има своју матрицу ∇ !) и да функција т.д. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o_a(h)\|_m}{\|h\|_n} = 0$ сукцесне норме у $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$:
 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|x\|_n = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

лин. пресликавање L_a називамо диференцијалом (изводом) од f у тачки a и пишемо $df(a)$ или $f'(a)$.

• уместо $o_a(h)$ пишемо и $O(h)$!

* Матрица диференцијала $df(a)$ назива се Јакобијевом матрицом функције f у тачки a .

Специјално: $m=n$ ($\det$ постоји само за квадратне матрице!) $\rightarrow \det(df(a))$ зовемо Јакобијаном функције f у тачки a .

СТАВ: $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ диференцијабилна у $a \in A \Leftrightarrow f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ је диференцијабилна у $a \in A \quad \forall i = \overline{1, m}$ координатне функције!
 $f = (f_1, \dots, f_m)$

СТАВ: $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и f диференцијабилна у $a \in A \Rightarrow$ диференцијал од f у a је јединствено одређен матрицом

$$df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \quad m \times n - \text{матрица!}$$

СПЕЦИЈАЛНО: $n=1$, тј. $f: \underset{\mathbb{R}}{A} \rightarrow \mathbb{R}$ и f диф. у $a \in A$

$$\Rightarrow df(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right]$$

Нека је $h = (h_1, \dots, h_n)$:

$$df(a) \cdot h = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right] \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i$$

Из дефиниције имамо: $f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + o(h)$, $h \rightarrow 0$

$$\leadsto f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i = o(h), \quad h \rightarrow 0$$

$$\leadsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i\|_1}{\|h\|_n} = 0$$

$\text{у } \mathbb{R}: \|x\|_1 = |x|$

Дакле, диференцијабилност функције $f: \underset{\mathbb{R}^n}{A} \rightarrow \mathbb{R}$ се своди на проверу услова

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2}} = 0$$

можемо да
загледамо апсолутне
зградске у бројоци
се питамо да ли је
лимео 0

T: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна у $a \in A \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ за $i = \overline{1, n}$

T: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ има непрекидне парцијалне изводе у окolini тачке $a \in A$
 $\Rightarrow f$ је диференцијабилна у a .

10. Нека је $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(а) Да ли је f непрекидна на $\mathbb{R}^2$?

(б) Наћи парцијалне изводе од f у свим тачкама из $\mathbb{R}^2$.

(в) Да ли је f диференцијабилна на $\mathbb{R}^2$?

(a) За $(x,y) \neq (0,0)$, јасно је да је f непрекидана ($f(x,y) = \frac{\text{непр.}}{\text{непр.}}$)

Да ли је f непрекидана у $(0,0)$, тј. да ли је $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$?

$$0 \leq \left| \frac{xy^3}{x^4+y^2} \right| = \frac{|x| \cdot |y| \cdot y^2}{x^4+y^2} \leq |x| \cdot |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^4+y^2} = 0$$

$$\Rightarrow f \in C(\mathbb{R}^2)$$

(b) $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^4+y^2) - 4x^4y^3}{(x^4+y^2)^2} = \frac{y^5 - 3x^4y^3}{(x^4+y^2)^2}$$

Третирамо y као константу!

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2x(x^4+y^2) - 2xy^4}{(x^4+y^2)^2} = \frac{3y^2x^5 + xy^4}{(x^4+y^2)^2}$$

Третирамо x као константу!

у $(x,y) = (0,0)$: f је задрто на различите начине у околини ове тачке, па морамо да рачунамо изводе по дефиницији.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

(B) $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ су непрекидне функције на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
 $\Rightarrow f \in D(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

у $(x,y) = (0,0)$ ћемо испитати диференцијабилност по дефо.

$$\lim_{(h_1,h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - 0 \cdot h_1 - 0 \cdot h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h_1 h_2^3}{h_1^4+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0?$$

$$0 \leq \left| \frac{h_1 h_2^3}{\sqrt{h_1^2+h_2^2} (h_1^4+h_2^2)} \right| = \frac{|h_1| \cdot |h_2| \cdot h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2} (h_1^4+h_2^2)} \leq |h_2| \xrightarrow{(h_1,h_2) \rightarrow (0,0)} 0$$

$$\frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2}} = \frac{|h_1|}{|h_1|} = 1$$

$$\Rightarrow f \in D(\mathbb{R}^2)$$

□

11. Нека је $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^4+y^4}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Да ли је f непрекидана на $\mathbb{R}^2$?

(b) Да ли f има извод по сваком правцу кроз $(0,0)$?

(B) Да ли је f диференцијабилна на $\mathbb{R}^2$?

(а) f је очигледно непрекидност на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (непр. непр.)
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$?

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{\sqrt{x^4 + y^4}} \right| = \frac{x^2 |y|}{\sqrt{x^4 + y^4}} \leq |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0, \text{ т.ј. } f \in C(\mathbb{R}^2)$$

(б) Шта је извод у правцу вектора $\vec{e} = (e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$?
 тражило да важи $\|\vec{e}\| = 1$! (ако није, нормирамо га)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h \cdot \vec{e}) - f(a)}{h}$$

извод функције f у правцу вектора $\vec{e}$ у тачки $a \in \mathbb{R}^2$

НАПОМЕНА: $\vec{e} = (1, 0) \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial f}{\partial x}$

$\vec{e} = (0, 1) \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial f}{\partial y}$ и $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

СПЕЦИЈАЛНО: Ако је f диференцијабилна у $a \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(a) = \langle \text{grad } f(a), \vec{e} \rangle$, при чему је $\text{grad } f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$ — ГРАДИЈЕНТ ФУНКЦИЈЕ f (и сас одговарно пролази до $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$)

Нека је $\vec{e} = (e_1, e_2)$ и $\|\vec{e}\| = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + h(e_1, e_2)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h e_1, h e_2) - f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{k^3 e_1^2 e_2}{\sqrt{k^4 e_1^4 + k^4 e_2^4}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e_1^2 e_2}{\sqrt{e_1^4 + e_2^4}} = \frac{e_1^2 e_2}{\sqrt{e_1^4 + e_2^4}} \end{aligned}$$

Одговор видимо и партијалне изводе:

$$\vec{e} = (1, 0): \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \vec{e} = (0, 1): \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

(в) За $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2xy\sqrt{x^4+y^4} - \frac{2x^5y}{\sqrt{x^4+y^4}}}{x^4+y^4} = \frac{2x^5y + 2xy^5 - 2x^5y}{(x^4+y^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2xy^5}{(x^4+y^4)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x^2\sqrt{x^4+y^4} - \frac{2x^2y^3}{\sqrt{x^4+y^4}}}{x^4+y^4} = \frac{x^6+x^2y^4 - 2x^2y^4}{(x^4+y^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^6-x^2y^4}{(x^4+y^4)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ су непр. на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \Rightarrow f$ је диференцијабилна на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Шта се дешава у $(0,0)$?

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, h_2) - 0 \cdot h_1 - 0 \cdot h_2 - f(0,0)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h_1^2 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0 \quad ?$$

$$0 \leq \left| \frac{h_1^2 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leq 1 \quad \text{— ОВО НАМ НЕ ЗНАЧИ НИЦТА!}$$

Покушајмо преко Халмса: $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0,0)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}} \sqrt{\frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 \Rightarrow f \text{ није диференцијабилна у } (0,0) \nabla$$

12. Нека је $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{x^3}{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(а) Да ли је f непрекидна на $\mathbb{R}^2$?

(б) Да ли је f диференцијабилна на $\mathbb{R}^2$?

(а) $f \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ очигледно (композиција непрекидних функција)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 1 \quad ?$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\frac{x^3}{x^2+y^2}} = e^{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}}$$

јер је експоненцијална ф-ја непрекидна!

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right| = \frac{|x| \cdot x^2}{x^2+y^2} \leq |x| \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\frac{x^3}{x^2+y^2}} = e^0 = 1 = f(0,0) \rightsquigarrow f \in C(\mathbb{R}^2)!$$

(б) $(x,y) \neq (0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{\frac{x^3}{x^2+y^2}} \cdot \frac{3x^2(x^2+y^2) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{e^{\frac{x^3}{x^2+y^2}} \cdot (x^4 + 3x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{\frac{x^3}{x^2+y^2}} \cdot \frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

непр. функције на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \Rightarrow f$ је диференцијабилна на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$(x,y) = (0,0):$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^0 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - 1 \cdot h_1 - 0 \cdot h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{\frac{h_1^3}{h_1^2 + h_2^2}} - 1 - h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0 \quad ?$$

(*)

I НАЧИН: ПОЛАРНЕ КООРДИНАТЕ

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Смешај: } h_1 = r \cos \theta \\ h_2 = r \sin \theta \end{array} \right\} \quad \textcircled{*} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta \in [0, 2\pi)}} \frac{\frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} - 1 - r \cos \theta}{\sqrt{r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta \in [0, 2\pi)}} \frac{r \cos^3 \theta - 1 - r \cos \theta}{r}$$

$$= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta \in [0, 2\pi)}} \frac{\boxed{r \cos^3 \theta - 1}}{r \cos^3 \theta} \cdot \cos^3 \theta - \cos \theta = \cos^3 \theta - \cos \theta$$

Покажи $\theta \in [0, 2\pi)$ т.д. $\cos^3 \theta - \cos \theta \neq 0$ (нпр. $\theta = \frac{\pi}{3}$) $\Rightarrow f$ није диф. у $(0,0)$!

II НАЧИН: ПРЕКО ИЗМЕНЕ

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0,0)$$

$$\frac{e^{\frac{1}{2n}} - 1 - \frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + o(1)$$

↑
ТЕЖИОРЕЊЕ
ПРЕКО!

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{2n}} - 1 - \frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$$

$\Rightarrow f$ није диф. у $(0,0)$!

□

13. Нека је $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Показати да f има прескоке парцијалне

изведене у $(0,0)$ јер су неограничени у околини тачке $(0,0)$, али је f ипак диференцијабилна у $(0,0)$.

$$(x,y) \neq (0,0): \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2) \cdot \cos \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= 2x \cdot \left(\sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2} \right)$$

и слично $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \cdot \left(\sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2} \right)$

Довољно је тражити само за x јер је f симетрична по x и y , тј. $f(x,y) = f(y,x)$!

$$(x,y) = (0,0): \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h^2} = 0$$

и аналогно, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

$$\rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x \left(\sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2} \right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

За ову фкц треба показати да није непрекидна у $(0,0)$!

(за $\frac{\partial f}{\partial y}$ је сас аналогно)

Зато $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$?

Упутимо нас $T_{f,0}$. $x=y$ и $\sin \frac{1}{2x^2} = 0$:

$$\frac{1}{2x^2} = 2n\pi \leadsto x^2 = \frac{1}{4n\pi} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{4n\pi}}$$

$$\leadsto (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{4n\pi}}, \frac{1}{\sqrt{4n\pi}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} (0 - 2n\pi \cdot 1) = -2\sqrt{n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \neq 0!$$

Одговарајуће директно видимо и да је $\frac{\partial f}{\partial x}$ непрекинут око $(0,0)$.

f је диф. у $(0,0)$:

$$\begin{aligned} \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, h_2) - 0 \cdot h_1 - 0 \cdot h_2 - f(0,0)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{(h_1^2 + h_2^2) \cdot \sin \frac{1}{h_1^2 + h_2^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \cdot \sin \frac{1}{h_1^2 + h_2^2} = 0 \end{aligned}$$

$$0 \leq \left| \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \cdot \sin \frac{1}{h_1^2 + h_2^2} \right| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \cdot \underbrace{\left| \sin \frac{1}{h_1^2 + h_2^2} \right|}_{\leq 1} \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \xrightarrow{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} 0$$

$\Rightarrow f$ је диференцијабилна у $(0,0)$.

14. Како је $f(x,y,z) = \begin{cases} \left(1 + \sin \frac{x^3}{x^2+y^2+z^2}, 2x+z+2 \right) & , (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ (A,B) & , (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$

(а) Определити A и B т.д. је f непрекидна на $\mathbb{R}^3$.

(б) Наћи извод у правцу вектора $\vec{c}$ у $(0,0,0)$ за координатне функције

(в) Да ли је f диференцијабилна на $\mathbb{R}^3$?

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$, $f_1, f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ - координатне функције

f је непр./диференцијабилна у неким тачкама $\Leftrightarrow f_1$ и f_2 су непр./диференцијабилне у неким тачкама

$$(a) f_1(x,y,z) = \begin{cases} 1 + \sin \frac{x^3}{x^2+y^2+z^2} & , (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ A & , (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

$f_1 \in C(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$ - јесте (композиција непр. функција)

Желимо: $A = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f_1(x,y,z)$ (да ли f_1 има непр. у $(0,0,0)$)

непрекинутост функције $\sin$!

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f_1(x,y,z) = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \left(1 + \sin \frac{x^3}{x^2+y^2+z^2} \right) = 1 + \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \sin \frac{x^3}{x^2+y^2+z^2} = 1 + \sin \left(\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2+z^2} \right)$$

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{x^2+y^2+z^2} \right| = \frac{|x| x^2}{x^2+y^2+z^2} \stackrel{\leq 1}{\leq} |x| \xrightarrow{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2+z^2} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f_1(x,y,z) = 1 + \sin 0 = 1$$

Пакује, $A = 1$.

$$f_2(x,y,z) = \begin{cases} 2x+z+2 & , (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ B & , (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

Слично, $B = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} f_2(x,y,z) = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} (2x+z+2) = 2$

Приметимо: $f_2(x,y,z) = 2x+z+2$ за све $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$! (не морамо да раздвајамо на случајеве)

(δ) $f_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ као полином $\leadsto$ изврши у правцу $\vec{e}$ у $(0,0,0)$ можемо рачунати преко градијента: $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)$, $\|\vec{e}\| = 1$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \vec{e}}(0,0,0) = \langle \text{grad} f_2(0,0,0), (e_1, e_2, e_3) \rangle = \langle (2, 0, 1), (e_1, e_2, e_3) \rangle = 2e_1 + e_3$$

За f_1 рачунамо по дефиницији:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \vec{e}}(0,0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(h\vec{e}) - f_1(0,0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + \sin \frac{h^3 \vec{e}^3}{h^2(e_1^2+e_2^2+e_3^2)} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h\vec{e}^3}{h\vec{e}^3} \cdot \vec{e}^3 = \vec{e}^3 \quad \left(\begin{array}{l} \text{пронађи } h \text{ и } \vec{e} \text{ такви да } \\ \vec{e}^3 \neq 0 \end{array} \right)$$

$\vec{e} = (1,0,0) \downarrow \quad \vec{e} = (0,1,0) \downarrow \quad \vec{e} = (0,0,1) \downarrow$

$$\leadsto \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0,0) = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0,0) = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(0,0,0) = 0$$

(в) Већ смо видели: f_2 диференцијабилна на $\mathbb{R}^3$ као полином

$$(x,y,z) \neq (0,0,0): \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = \cos \frac{x^3}{x^2+y^2+z^2} \cdot \left(\frac{x^3}{x^2+y^2+z^2} \right)' = \cos \frac{x^3}{x^2+y^2+z^2} \cdot \frac{3x^2(x^2+y^2+z^2) - 2x^4}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = \cos \frac{x^3}{x^2+y^2+z^2} \cdot \frac{-2yx^3}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = \cos \frac{x^3}{x^2+y^2+z^2} \cdot \frac{-2zx^3}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

прци. изврши непрекинути на $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \xRightarrow{T} f_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$

Да ли је f_1 диференцијабилна у $(0,0,0)$?

$$\lim_{(h_1,h_2,h_3) \rightarrow (0,0,0)} \frac{f_1(h_1,h_2,h_3) - (f_1(0,0,0) - 1 \cdot h_1 - 0 \cdot h_2 - 0 \cdot h_3)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}} = \lim_{(h_1,h_2,h_3) \rightarrow (0,0,0)} \frac{1 + \sin \frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2+h_3^2} - 1 - h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$$

$$= \lim_{(h_1,h_2,h_3) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin \frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2+h_3^2} - h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}} = 0$$

посматрајмо низ $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0,0,0)$

$$\frac{\sin \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n^2}} - \frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{3}}{n}} = \frac{\sin(\frac{1}{3n}) - \frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{3}}{n}} = \frac{\frac{1}{3n} + o(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{3}}{n}} = \frac{-\frac{2}{3n} + o(\frac{1}{n})}{\frac{\sqrt{3}}{n}} = 0$$

$$= -\frac{2}{3\sqrt{3}} + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{2}{3\sqrt{3}} \neq 0 \rightsquigarrow f \text{ nije dif. u } (0,0,0) \\ \Rightarrow f \text{ nije dif. u } (0,0,0)!$$

□

ЗА БЕЖЕЈ: Нека је $f(x,y) = \begin{cases} xy \cos \frac{1}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Испитати непрекинутост и

диференцијабилност функције f на $\mathbb{R}^2$.

15. Нека је $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$, $x,y \in \mathbb{R}$. Одредити:

(a) $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \exists \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right\}$ - скуп тачака у којима постоје парцијални изводи

(b) $B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f \text{ диференцијабилна у } (x,y) \right\}$

$$(a) \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^3+y^3}} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+y^3}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists x^3+y^3 \neq 0! \\ x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) \\ x^2-xy+y^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4} \\ = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq 0 \\ (= \text{важи само за } x=y=0) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x^3+y^3 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq -x$$

Дакле, $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ постоје за $y \neq -x$



За $y = -x$ проверавамо по дефиницији:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, -x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, -x) - f(x, -x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(x+h)^3 - x^3} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3x^2h + 3xh^2 + h^3}}{h} \quad (h = \sqrt[3]{h^3})$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 + 3\frac{x}{h} + 3\left(\frac{x}{h}\right)^2} = \begin{cases} 1, & x=0 \\ +\infty, & x \neq 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ по правој $y = -x$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ постоји само у тачки $(0,0)$.

На ист начин добијемо да $\frac{\partial f}{\partial y}$ постоји у $(0,0)$ ($\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$)

$$\Rightarrow A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -x \right\} \cup \{(0,0)\}$$

(5) Приметимо: $B \subseteq A$!

$\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ у некр. дје за $y \neq -x \xRightarrow{T.}$ f је диф. у тим тачкама

$$\Rightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -x\} \subseteq B \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -x\} \cup \{(0,0)\}$$

Да ли $(0,0) \in B$?

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - 1 \cdot h_1 - 1 \cdot h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt[3]{h_1^3 + h_2^3} - h_1 - h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \stackrel{?}{=} 0$$

Узмимо низ $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (0,0)$: $\frac{\sqrt[3]{\frac{2}{n^3}} - \frac{2}{n}}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \neq 0$

$\Rightarrow f$ није диф. у $(0,0)$.

$$\Rightarrow B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -x\}$$