

СОПСТВЕНЕ ВРЕДНОСТИ И СПЕКТАР ОПЕРАТОРА

Банахов простор

* $A \in B(X) \rightsquigarrow$ посматрамо оператор $A - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$ и интересујемо нас оне вредности λ за које овај оператор није инвертибилан (такви λ су тачке спектра оператора A) $A - \lambda I$ није бијекција

* Спектар означавамо са $\sigma(A)$ и важи $\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \|A\|\}$

* За $A \in B(H)$, $\sigma(A) \neq \emptyset$ и $\sigma(A)$ је компактан подскуп од $\mathbb{C}$.

* Ако $N(A - \lambda I) \neq \{0\}$ (тј. $A - \lambda I$ није инјективан, кажемо да је λ $(A - \lambda I)^{-1}\{0\}$ сопствена вредност оператора A)

* Скуп сопствених вредности зовемо пунктуални (тачкасти) део спектра и означавамо са $\sigma_p(A)$.

* Сваком $\lambda \in \sigma_p(A)$ одговара барем један $x \in X, \{0\}$ т.д. $Ax = \lambda x$
сопствени вектор који одговара λ

* $N(A - \lambda I) = \{0\}$ $\Rightarrow \overline{R(A - \lambda I)} \neq X \Rightarrow \lambda \in \sigma_r(A)$ - резидуални део спектра
слика оператора $A - \lambda I$

$\Rightarrow \overline{R(A - \lambda I)} \neq \overline{R(A - \lambda I)} = X \Rightarrow \lambda \in \sigma_c(A)$ - континуални део спектра

$$\rightsquigarrow \sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_c(A)$$

* И Хилбертов, $A \in B(H)$ нормални оператор $\Rightarrow \sigma_r(A) = \emptyset$

* $A = A^* \Rightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}$

① Нека је $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , x \in [0, \frac{1}{2}] \\ x^2 & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 2-x & , x \in [1, 2] \end{cases}$ и оператор $\mathcal{L}: L^2(0,2) \rightarrow L^2(0,2)$,
 $\mathcal{L}f = f \cdot g$

Одредити $\|\mathcal{L}\|$ као и сопствене вредности и сопствене векторе од $\mathcal{L}$.

(1) $\|\mathcal{L}\|$:

$$\|\mathcal{L}f\|_2^2 = \int_{(0,2)} |f(x)g(x)|^2 dx \leq \max_{x \in [0,2]} |g(x)|^2 \int_{(0,2)} |f(x)|^2 dx = m^2 \cdot \|f\|_2^2 = \|f\|_2^2$$

$m = \max_{x \in [0,2]} |g(x)| = 1$

$$\rightsquigarrow \mathcal{L} \in \mathcal{B}(0,2) \quad , \quad \|\mathcal{L}\| \leq 1$$

Одређимо тајну норму за $\mathcal{L}$: Нека је $f = \chi_{(1,1+\frac{1}{n}]}$

$$\|f_n\|_2^2 = \frac{1}{n} \rightsquigarrow \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}f_n\|_2^2 &= \int_{(1,1+\frac{1}{n})} |g(x)|^2 dx = \int_{(1,1+\frac{1}{n})} (2-x)^2 dx = \int_{(1,1+\frac{1}{n})} (4 - 4x + x^2) dx = \frac{4}{n} - 2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - 1\right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 - 1\right) \\ &= \frac{4}{n} - \frac{4}{n^2} + \frac{1}{3n^2} \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\|\mathcal{L}f_n\|_2^2}{\|f_n\|_2^2} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|\mathcal{L}f_n\|_2}{\|f_n\|_2} = 1 \Rightarrow \|\mathcal{L}\| \geq 1 \quad , \text{ т.ј. } \|\mathcal{L}\| = 1$$

(2) Собствене вредности:

Тражимо $\lambda \in \mathbb{C}$ т.д. $\mathcal{N}(\mathcal{L} - \lambda I) \neq \{0\}$

Нека је $f \in \mathcal{N}(\mathcal{L} - \lambda I)$: $\mathcal{L}f - \lambda f = 0$

$$gf - \lambda f = 0 \rightsquigarrow (g(x) - \lambda) \cdot f(x) = 0 \quad (\text{с.с.})$$

Приметимо: за $\lambda = \frac{1}{4}$: $g(x) - \lambda \equiv 0$ на $[0, \frac{1}{2}]$ па ту f може да буде било како дефинисана + на $[0, \frac{1}{2}] > 0 \rightsquigarrow f$ не мора бити 0 с.с.

Прецизније: $\mathcal{N}(\mathcal{L} - \frac{1}{4}I) = \{f \in L^2(0,2) \mid f = 0 \text{ с.с. на } (\frac{1}{2}, 2)\}$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{4} \in \sigma_p(\mathcal{L})$$

нпр. $\chi_{[0, \frac{1}{2}]} \in \mathcal{N}(\mathcal{L} - \frac{1}{4}I) \Rightarrow \mathcal{L}\chi_{[0, \frac{1}{2}]} = \frac{1}{4} \cdot \chi_{[0, \frac{1}{2}]}$, т.ј. $\chi_{[0, \frac{1}{2}]}$ је

собствени вектор.

Ово је једино и једина сопствена вредност оператора $\mathcal{L}$, јер за било коју другу вредност λ , $g - \lambda = 0$ важи у највише 2 тачке, а то је скуп мере 0. □

(2) Нека је $A: \ell^2 \rightarrow \ell^2$, $Ax = (x_{2n})_{n \geq 1}$, за $x = (x_n)_n \in \ell^2$. Одређити A^* , $\sigma(A)$ и $\sigma(A^*)$.

(1) A је добро деф. и ограничен (нако се провери) $\Rightarrow \exists A^* \in \mathcal{B}(\ell^2)$

$$\langle Ax, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} (Ax)_n \cdot \overline{y_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_{2n} \cdot \overline{y_n} \stackrel{\text{ово хотимо}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cdot \overline{(A^*y)_n} = \langle x, A^*y \rangle$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$

изаберимо: $x = e_{2k} \rightsquigarrow \overbrace{y_k}^{\text{1}} = \overbrace{(A^* y)_{2k}}^{\text{1}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightsquigarrow A^* y = (0, y_1, 0, y_2, 0, \dots) \end{array} \right. , \text{ за } y \in \mathbb{C}^2$
 $x = e_{2k+1} \rightsquigarrow 0 = \overbrace{(A^* y)_{2k+1}}^{\text{1}}$

Приметимо: $\|A^* x\|_2^2 = \|x\|_2^2 \Rightarrow \|A^*\| = 1 = \|A\|$ (увер је $\|A\| = \|A^*\|$!)
 $\Rightarrow \sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$

Одредимо $\sigma_p(A)$:

Нека је $x \in \mathcal{N}(A - \lambda I)$, тј. $Ax = \lambda x$.

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow (x_2, x_4, x_6, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots)$$

$$\rightsquigarrow x_2 = \lambda x_1$$

$$x_4 = \lambda x_2$$

$$x_6 = \lambda x_3$$

$\vdots$

$$x_{2n} = \lambda x_n, \text{ за } n \in \mathbb{N}$$

Дакле, приметимо: $x_{2^n} = \lambda \cdot x_{2^{n-1}} = \lambda^2 x_{2^{n-2}} = \dots = \lambda^n x_1$. Изаберимо $x_1 = 0$ - он

одређује све координате т.д. је $n = 2^k$, а на остале поставимо 0

Мада, добили смо вектор $x = (1, \lambda, 0, \lambda^2, 0, 0, 0, \lambda^3, 0, \dots)$

За овако конструисан вектор x свакако је задовољено $*$, треба још само проверити за $\lambda \in \mathbb{C}$ је овај вектор у $\mathbb{C}^2$:

$$x \in \mathbb{C}^2 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda^n|^2 < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda|^{2n} < +\infty, \text{ тј. мора бити } | \lambda | < 1$$

$$\Rightarrow \lambda \in \sigma_p(A) \text{ ако } |\lambda| < 1, \text{ тј. } \sigma_p(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Преостало да одредимо цео спектар $\sigma(A)$: За то је довољно приметити да важи

$$\text{следи: } \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} = \sigma_p(A) \subseteq \sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

$$\Rightarrow \overline{\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}} = \overline{\sigma_p(A)} \subseteq \overline{\sigma(A)} \subseteq \overline{\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

Затвореност отвореног диска

је затворен диск!

$$\Rightarrow \sigma(A) = \overline{\sigma_p(A)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

$$\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)} = \sigma(A)$$

$$\text{јерек важи! } \{ \overline{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A) \}$$