

деф: X, Y Банахови простори, $(A_n)_n$ низ оператора у $B(X, Y)$

(1) $(A_n)_n$ **униформно** конвергира ка $A \in B(X, Y)$ ако $\|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(2) $(A_n)_n$ **јак** конвергира ка $A \in B(X, Y)$ ако $(\forall x \in X) \|A_n x - A x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

(3) $(A_n)_n$ **слабо** конвергира ка $A \in B(X, Y)$ ако $(\forall x \in X) (\forall f \in Y^*) f(A_n x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(A x)$
 $(A = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)$

* појам слабе и јаке конвергенције се дефинише на произвољном Банаховом простору $(X, \|\cdot\|)$:

(1) $(x_n)_n$ низ у X **слабо** конвергира ка $x \in X$ ако $(\forall f \in X^*) \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$

(2) $(x_n)_n$ низ у X **јак** конвергира ка $x \in X$ ако $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

УНИФОРМНА $\Rightarrow$ ЈАКА $\Rightarrow$ СЛАБА ∇

СЛАБА КОНВЕРГЕНЦИЈА У КОНКРЕТНИМ ПРОСТОРИМА:

* $\mathbb{C}^p$, $1 < p < \infty$: $x_n \in \mathbb{C}^p \rightsquigarrow x_n = (x_n^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, $x_0 \in \mathbb{C}^p$, $x_0 = (x_0^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$

$x_n \xrightarrow{w} x \iff (1) \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(k)} = x_0^{(k)}$ — конв. по свакој координати

* $\mathbb{C}^1$: слаба конв. $\iff$ јака конв. (Шурова Т.)

* $C[a, b]$: $f_n \xrightarrow{w} f \iff (1) \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \max_{x \in [a, b]} |f_n(x)| < +\infty$

(2) $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$, $\forall x \in [a, b]$

* L^p , $1 < p < \infty$: $f_n \in L^p(a, b)$, $f \in L^p(a, b)$

$f_n \xrightarrow{w} f \iff (1) \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_p < +\infty$

(2) $\int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$, $\forall b \in [a, b]$

важи и: $f_n \xrightarrow{\text{јак}} f \iff f_n \xrightarrow{w} f \wedge \|f_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|_p$
 $\uparrow$
 $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

① Испитати јаку конвергенцију низа оператора $A_n: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ дефинисаних са:

$$A_n f(x) = n \int_0^x x^{-n} y^{n+1} f(y) dy$$

Желимо да применимо Т. Банаха - Штайнхауса:

$$|A_n f(x)| = |n x^{-n} \int_0^x y^{n+1} f(y) dy| \leq n x^{-n} \|f\|_\infty \int_0^x y^{n+1} dy = \frac{n}{n+2} x^2 \cdot \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|A_n f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |A_n f(x)| \leq \max_{x \in [0,1]} \frac{n}{n+2} x^2 \cdot \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|A_n\| \leq 1, \text{ за све } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$$

Фундаментални скуп у $C[0,1]$ је $\{f_k | k \in \mathbb{N}_0\}$, $f_k(x) = x^k$

$$A_n f_k(x) = n \int_0^x x^{-n} y^{n+1} f_k(y) dy = n x^{-n} \int_0^x y^{n+1} \cdot y^k dy = n x^{-n} \cdot \frac{x^{n+k+2}}{n+k+2} = \frac{n}{n+k+2} \cdot x^{k+2}$$

$$\leadsto \|A_n f_k\|_\infty = \frac{n}{n+k+2} \|x^{k+2}\|_\infty$$

$$\text{и како } \frac{n}{n+k+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \text{ закључујемо } \|A_n f_k - x^{k+2}\|_\infty = \|x^{k+2}\|_\infty \left| \frac{n}{n+k+2} - 1 \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\leadsto A_n f_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^{k+2} = x^2 \cdot f_k(x)$$

Т. Б-Ш

$$\Rightarrow (\forall f \in C[0,1]) \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n f =: A f, \quad A \in \mathcal{B}(C[0,1], C[0,1])$$

$$\text{Јошимо } B: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$$

$$B f(x) = x^2 f(x)$$

B је заиста отр. лин. оператор (проверити за вежбу!) + $A \equiv B$ на фундаменталном скупу

$$\Rightarrow A f = B f \text{ за све } f \in C[0,1] \text{ и низ } (A_n)_n \text{ јак конвергира ка } A. \quad \square$$

② Испитати слабу, јаку и униформну конвергенцију низа оператора $A_n: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ дефинисаних са $A_n f(x) = f(x^{1+\frac{1}{n}})$.

$$A_n \in \mathcal{B}(C[0,1], C[0,1]):$$

A_n је линеаран и

A_n је ограничен:

$$|A_n f(x)| = |f(x^{1+\frac{1}{n}})| \leq \|f\|_\infty, \text{ за све } x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \|A_n f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |A_n f(x)| \leq \|f\|_\infty$$

$$\leadsto A_n \in \mathcal{B}(C[0,1], C[0,1]), \quad \|A_n\| \leq 1 \text{ за све } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Одговарајуће имамо и } \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| \leq 1 < +\infty!$$

Шта се дешава на фундаменталном скупу?

$$f_k(x) = x^k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$A_n f_k(x) = f_k(x^{1+\frac{1}{n}}) = x^{(1+\frac{1}{n}) \cdot k} = x^k \cdot x^{\frac{k}{n}} = x^{\frac{k}{n}} \cdot f_k(x)$$

Узимо оператор $I: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, $I f = f$ (очигледно $\int_0^1 I f \in \mathcal{B}(C[0,1], C[0,1])$)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n f_k - I f_k\|_{\infty} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{x \in [0,1]} |x^{\frac{k}{n}} \cdot f_k(x) - f_k(x)| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{x \in [0,1]} \underbrace{x^k \cdot (1 - x^{\frac{k}{n}})}_{g_k(x)} \quad (*) \end{aligned}$$

Интересује нас у којој тачки из $[0,1]$ g_k достиже максимум.

$$\begin{aligned} g_k'(x) &= k x^{k-1} - (k + \frac{k}{n}) \cdot x^{k+\frac{k}{n}-1} \\ &= k x^{k-1} \left(1 - x^{\frac{k}{n}} - \frac{1}{n} x^{\frac{k}{n}} \right) \end{aligned}$$

$$g_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad 1 - x^{\frac{k}{n}} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 0$$

$$x^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{n}{k}} \quad k \neq 0!$$

$$g_k\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n}{k}}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} > 0$$

за $k=0$
 $\Downarrow$
 $g_k \equiv 0$



$$(*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{e} \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n f_k = I f_k$ за сваку f_k из фундаменталног скупа

Т.Б-Ш

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n f =: A f$ за све $f \in C[0,1]$ и где $A \equiv I$ (показује се на фундаменталном скупу).

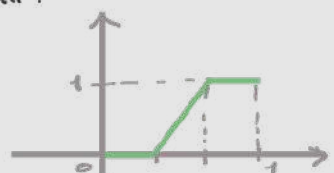
$\Rightarrow (A_n)_n$ јако конвертира ка I , па самим тим конвертира и обрн.

Покажимо да $(A_n)_n$ не конвертира унитарно ка I , тј. да не важи $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n - I\| = 0$.

Фиксирајмо произвољно $a \in (0,1)$: $0 < a^{1+\frac{1}{n}} < a < 1$

За $n \in \mathbb{N}$ дефинишимо функцију $f_n \in C[0,1]$ на следећи начин:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , x \in [0, a^{1+\frac{1}{n}}] \\ 1 & , x \in [a, 1] \\ \text{линт. до} & , x \in [a^{1+\frac{1}{n}}, a] \\ \text{непр.} & \end{cases}$$



Очигледно важи $\|f_n\|_\infty = 1$ за све $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|A_n - I\| &= \sup_{\|f\|_\infty=1} \|A_n f - I f\|_\infty \geq \|A_n f_n - f_n\|_\infty \\ &= \max_{x \in [0,1]} |A_n f_n(x) - f_n(x)| \\ &\geq |A_n f_n(a) - f_n(a)| \\ &= \underbrace{|f_n(a + \frac{1}{n})|}_0 - \underbrace{|f_n(a)|}_1 = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n - I\| \neq 0! \quad (\geq 1)$$

② Нека су X и Y нвп, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $(x_n)_n$ произвољан низ у X , $x \in X$. Покажи.

$$A \in \mathcal{B}(X, Y) \Leftrightarrow (\omega\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \Rightarrow \omega\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} A(x_n) = A(x))$$

($\Rightarrow$): пр. $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ и $\omega\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$. Треба доказати $\omega\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} A(x_n) = A(x)$, т.ј.

$$\text{за } f \in Y^* \text{ произвољно важи } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(Ax_n) = f(Ax) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f \circ A(x_n) = f \circ A(x)$$

$f \circ A$ у непрекјути $\Rightarrow f \circ A$ је непрекјути функција на X

$$\omega\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \Leftrightarrow (\forall g \in X^*) \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = g(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f \circ A(x_n) = f \circ A(x)$$

($\Leftarrow$): Раније смо видели: За лн. оп. $A: X \rightarrow Y: A$ непр. $\Leftrightarrow A$ непр. у свако $x \in X$ (нпр. у 0!)

Пос, A није непрекјути у $0 \in X \Rightarrow (\exists (x_n)_n \text{ низ из } X) \text{ т.д. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\| = 0 \text{ али } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|Ax_n\| > 0$

$\leadsto \exists$ подниз $(x_{n_k})_k$ низа $(x_n)_n$ и константа $M > 0$ т.д. $\|Ax_{n_k}\| \geq M > 0$ за све k

Поне, дефинишимо векторе $y_k := \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}$, $k \geq 1$ ($\|x_{n_k}\| > 0$!)

$$\|y_k\| = \sqrt{\|x_{n_k}\|} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$\|Ay_k\| = \frac{\|Ax_{n_k}\|}{\sqrt{\|x_{n_k}\|}} \geq \frac{M}{\sqrt{\|x_{n_k}\|}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty \quad (*)$$

Низ y_k јеро кнв. ка 0 у $X \rightarrow y_k$ и свако кнв. ка 0

$\Rightarrow Ay_k$ свако кнв. ка 0

Сваки свако конвергентан низ је ограничен! $\Rightarrow Ay_k$ је ограничен $\nleftrightarrow$ са $(*)$

4. Нeka $j \in A_h: L^1(a,b) \rightarrow L^1(a,b)$, $A_h f(x) := \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} g(t) dt$, $h > 0$, при чему j је $g(t) = \begin{cases} f(t), & t \in (a,b) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. Оцртајте $\|A_h\|$ и понабљајте како j и A_h кпа, $h \rightarrow 0^+$.

Оцртајмо норму оператора A_h :

$$\begin{aligned} \|A_h f\|_1 &= \int_a^b \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} g(t) dt \right| dx \leq \frac{1}{2h} \int_a^b \int_{x-h}^{x+h} |g(t)| dt dx = \frac{1}{2h} \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \chi_{[x-h, x+h]}(t) dt dx \\ &\stackrel{\text{ФУНДАМЕНТАЛНА Т.}}{=} \frac{1}{2h} \int_a^b \int_a^b |f(t)| \chi_{[x-h, x+h]}(t) dx dt \\ &\stackrel{\text{II}}{=} \frac{1}{2h} \int_a^b |f(t)| \int_a^b \chi_{[t-h, t+h]}(x) dx dt \\ &= \frac{1}{2h} \int_a^b |f(t)| \cdot (t+h - t-h) dt = \int_a^b |f(t)| dt = \|f\|_1 \\ &\Rightarrow A_h \in \mathcal{B}(L^1(a,b), L^1(a,b)), \quad \|A_h\| \leq 1 \end{aligned}$$

Тврдимо да је $\|A_h\| = 1$.

Нeka $j \in f(x) = \chi_{[c,d]}(x)$, где $j \in [c-h, d+h] \subseteq [a,b]$.
 $A_h f(x) = \frac{1}{2h} \cdot m([c,d] \cap [x-h, x+h])$

$$\leadsto A_h f(x) = \begin{cases} 0, & x < c-h \quad (\text{нпрмак } j \notin) \\ \frac{x+h-c}{2h}, & c-h \leq x \leq c+h \\ \frac{x+h-x+h}{2h} = 1, & c+h \leq x \leq d-h \\ \frac{d-x+h}{2h}, & d-h \leq x \leq d+h \\ 0, & x > d+h \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \leadsto \|A_h f\|_1 &= \int_{c-h}^{c+h} \frac{x+h-c}{2h} dx + \int_{c+h}^{d-h} 1 dx + \int_{d-h}^{d+h} \frac{d-x+h}{2h} dx \\ &= \frac{1}{2h} \int_0^{2h} t dt + d-h-c-h + \frac{1}{2h} \int_0^{2h} t dt \\ &= \frac{1}{2h} \cdot 2h^2 + d-c-2h + \frac{1}{2h} \cdot 2h^2 = d-c = \int_a^b \chi_{[c,d]}(x) dx = \|f\|_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|A_h\| = 1$$

ФАКТОРОВА Т $\Rightarrow$ Можемо посматрати $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{h_n}$ за произв. низ т.д. $h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^+$.

Вет смо видели: $\sup_n \|A_{h_n}\| = 1 < +\infty$

ФУНДАМЕНТАЛНИ СРП $j \in L^1(a,b)$ су КАРАКТЕРИСТИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ $\chi_{[c,d]}$!
 $a < c < d < b$

из * видим, что имеет смысл ожидать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n \chi_{[c,d]} - \chi_{[c,d]}\|_1 = 0$

Несколько $f(x) := \chi_{[c,d]}(x)$.

$$A_n f(x) - f(x) = \begin{cases} 0, & x < c - h_n \\ \frac{x + h_n - c}{2h_n}, & c - h_n \leq x \leq c \\ \frac{x + h_n - c - 2h_n}{2h_n}, & c < x \leq c + h_n \\ 0, & c + h_n < x \leq d - h_n \\ \frac{d - x + h_n - 2h_n}{2h_n}, & d - h_n < x \leq d \\ \frac{d - x + h_n}{2h_n}, & d < x \leq d + h_n \\ 0, & x > d + h_n \end{cases} \quad \text{где } f = 1!$$

$$\|A_n f - f\|_1 = \int_{c-h_n}^c \frac{x+h_n-c}{2h_n} dx + \int_c^{c+h_n} \frac{-x+h_n+c}{2h_n} dx + \int_{d-h_n}^d \frac{-d+h_n+x}{2h_n} dx + \int_d^{d+h_n} \frac{d-x+h_n}{2h_n} dx$$

$$= \frac{h_n}{4} + \frac{h_n}{4} + \frac{h_n}{4} + \frac{h_n}{4} = h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow$ $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n f =: Af$ за все $f \in L^1(a,b)$ и $Af = f!$ (т.е. оператор A_n сс. по сходимости на функциональном скупке).

$\leadsto A_n$ jako кнв. к $I \Rightarrow A_n$ ссвд кнв. к I

Твердиме, что A_n не конвергира равномерно к I , т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - I\| \neq 0$

Несколько h довольно мало т.е. $a+2h < b$ и, определим:

$$f_h(x) := \frac{1}{h} \chi_{(a, a+h)}(x)$$

$$\|f_h\|_1 = \frac{1}{h} \int_{(a,b)} \chi_{(a, a+h)}(x) dx = \frac{1}{h} \cdot (a+h-a) = 1 \quad (\text{т.е. } f_h \text{ је јединични вектор})$$

$$A_n f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} g(t) dt = \frac{1}{2h^2} \int_{(x-h, x+h) \cap (a, a+h)} \overset{\leq 1}{f_h(t)} dt \leq \frac{1}{2h^2} \int_a^{a+h} 1 dt = \frac{1}{2h}$$

$$\Rightarrow |f_h(x) - A_n f_h(x)| \geq \frac{1}{h}$$

$$\text{за } x \in (a, a+h): f_h(x) = \frac{1}{h}$$

$$|f_h(x) - A_n f_h(x)| \geq \frac{1}{h} - \frac{1}{2h} = \frac{1}{2h}$$

$$\leadsto \int_{(a, a+h)} |f_h(x) - A_n f_h(x)| dx \geq \int_{(a, a+h)} \frac{1}{2h} dx = \frac{1}{2h} \cdot h = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \|f_h - A_n f_h\|_1 \geq \frac{1}{2} + \|f_h\|_1 = 1 \Rightarrow \|I - A_n\| \geq \frac{1}{2}!$$

ПРИМЕРИ ДУАЛА БНАХОВИХ ПРОСТОРА:

T: $f \in C^*$ $\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $\forall x = (x_n)_n \in C$, при чему $y = (y_n)_n \in C'$ једнозначно одређен функционом f и важи $\|y\|_1 = \|f\|$.

$\|C^* \cong C'\|$

T: $f \in C^*$ $\Leftrightarrow f(x) = y_0 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $\forall x = (x_n)_n \in C$, при чему y или $y = (y_n)_n \in C'$ и скалар y_0 једнозначно одређени функционом f и важи $\|y\|_1 + |y_0| = \|f\|$.

T: $f \in (C')^*$ $\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $\forall x = (x_n)_n \in C'$, $y = (y_n)_n \in C^{\infty}$ једнозначно одређен функционом f и важи $\|f\| = \|y\|_{\infty} = \sup |y_n|$.

$\|(C')^* \cong C^{\infty}\|$

T: $1 < p < \infty$

$f \in (C^p)^*$ $\Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $\forall x = (x_n)_n \in C^p$, $y = (y_n)_n \in C^2$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{2} = 1$!) једнозначно одређен функционом f и $\|f\| = \|y\|_2$

$\|(C^p)^* \cong C^2\|$

T: $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{2} = 1$

$f \in (L^p(a,b))^*$ $\Leftrightarrow f(x) = \int_a^b \alpha(t) x(t) dt$, $\forall x \in L^p(a,b)$, $\alpha \in L^2(a,b)$ једнозначно одређена функционом f и $\|f\| = \|\alpha\|_2$

$\|(L^p)^* \cong L^2\|$

T: $f \in (L^1(a,b))^*$ $\Leftrightarrow f(x) = \int_a^b \alpha(t) x(t) dt$, $\forall x \in L^1(a,b)$, $\alpha \in L^{\infty}(a,b)$ једнозначно одређена функционом f и $\|f\| = \|\alpha\|_{\infty}$

$\|(L^1)^* \cong L^{\infty}\|$

деф: (слаба *-конвергенција) За низ $(f_n)_n$ из X^* кажемо да слабо *-конвергира ка $f \in X^*$ ако $(\forall x \in X) f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

пример: $(e^n)_n$ низ вектора у $C^{\infty} \rightsquigarrow f_n \in (C^1)^*$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k (e^n)_k = x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 $\uparrow$
 $x \in C^1!$

$\Rightarrow w^* - \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 0$

⑤ Нека је за свако $n \in \mathbb{N}$ дефинисана функција $x_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$x_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & , t \in [2^n, 2^{n+1}] \\ 0 & , t \notin [2^n, 2^{n+1}] \end{cases}$$

Испитати слабу конвергенцију низа $(x_n)_n$ у $L^1(\mathbb{R})$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in L^1(\mathbb{R}) \text{ и}$$

Пн. да низ $(x_n)_n$ слабо конвергира у $L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow (\forall f \in (L^1(\mathbb{R}))^*) \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f(x_n)$

Видели смо $(L^1)^* \cong L^\infty$, па претходно заправо значи да $\forall g \in L^\infty(\mathbb{R})$ постоји

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} x_n(t) g(t) dm(t) \in \mathbb{C}$$

Трба одабрати експлицитно $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ т.д. добијемо контрадикцију:

Нека је $g(x) = (-1)^n$ за $x \in [2^n, 2^{n+1}]$ и $g = 0$ на остатку реалне праве, т.ј. $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2^n, 2^{n+1}] = (-\infty, 2)$

$$g \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ и}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} x_n(t) g(t) dm(t) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} x_n(t) \chi_{[2^n, 2^{n+1}]}(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \int_{[2^n, 2^{n+1}]} \frac{1}{2^n} dm(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \quad \nexists \end{aligned}$$

□

⑥ Нека је низ функција $(f_n)_n$ дефинисан са $f_n(x) = \sin nx$, за свако $n \in \mathbb{N}$ и $x \in [0, 2\pi]$. Испитати слабу конвергенцију низа $(f_n)_n$ у $L^p[0, 2\pi]$ за $p \in (1, +\infty)$.

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad f_n \in L^p[0, 2\pi] \text{ и}$$

Покажимо: $f_n \xrightarrow{w} 0$, $n \rightarrow +\infty$ т.ј. $\forall F \in (L^p[0, 2\pi])^* \quad F(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} F(0) = 0$

$(L^p)^* \cong L^q$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) $\Rightarrow$ произвольном $F \in (L^p[0, 2\pi])^*$ одговара јединствено $g_F \in L^q[0, 2\pi]$ т.д. $F(f_n) = \int_{[0, 2\pi]} f_n g_F dm$, за све $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{додатно, } p \in (1, +\infty) \Rightarrow q \in (1, +\infty)$$

Дакле, за свако $n \in \mathbb{N}$ дефинишимо функционал $G_n: L^q[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ са

$$G_n(g) = \int_{[0, 2\pi]} f_n g dm, \quad \text{за све } g \in L^q[0, 2\pi].$$

$$|G_n(g)| = \left| \int_{[0, 2\pi]} f_n g \, dm \right| \leq \int_{[0, 2\pi]} |f_n| \cdot |g| \, dm \leq \sqrt{\int_{[0, 2\pi]} |f_n|^p \, dm} \cdot \sqrt{\int_{[0, 2\pi]} |g|^2 \, dm} \leq \|f_n\|_p \cdot \|g\|_2$$

ХЕЛДЕРОВА НЕРАВНОСТЬ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$

$$\Rightarrow G_n \in \mathcal{B}(L^2[0, 2\pi], \mathbb{C}), \quad \|G_n\| \leq \|f_n\|_p \leq \sqrt{2\pi}$$

Желимо да искористимо Т. Банах-Швајцхауса.

$$(1) \sup_{n \in \mathbb{N}} \|G_n\| \leq \sqrt{2\pi} < +\infty$$

$$\int_{[0, 2\pi]} |f_n|^p \, dm \leq \int_{[0, 2\pi]} dm = 2\pi$$

(2)

ФУНДАМЕНТАЛНИ СЕРИЈА У $L^2[0, 2\pi]$ СУ КАРАКТЕРИСТИЧНЕ ФУНКЦИЈЕ $\chi_{[a, b]}$!
(важни за $p < +\infty$!) $0 \leq a < b \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\chi_{[a, b]}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} f_n \, dm = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} \operatorname{sgn}(\sin nx) \, dm(x) = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена: } b=n\pi \end{array} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{[na, nb]} \operatorname{sgn}(\sin t) \, dm(t) \end{aligned}$$

$$\text{Приметимо: } \int_{[2k\pi, 2(k+1)\pi]} \operatorname{sgn}(\sin t) \, dm(t) = 0$$

$$\left| \int_{[na, nb]} \operatorname{sgn}(\sin t) \, dm(t) \right| \leq \left| \int_{[na, nb]} \operatorname{sgn}(\sin t) \, dm(t) \right| \leq 2\pi$$

интервал $[na, nb]$ можемо да поделимо на
конкретан број интервала дужине 2π на којима
је интеграл 0, а остатак је сигурно дужине
 $\leq 2\pi$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n} \left| \int_{[na, nb]} \operatorname{sgn}(\sin t) \, dm(t) \right| \leq \frac{2\pi}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{[na, nb]} \operatorname{sgn}(\sin t) \, dm(t) = 0$$

□

7. Испитати слабу конвергенцију низа $(e_1 + \dots + e_{2n})_n$ у e^∞

Нека је $f_k: e^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ дефинисан са $f_k(x) = x_k$ (k-та координата
низa x)

Очигледно важи $f_k \in \mathcal{B}(e^\infty, \mathbb{C})$ за све $k \in \mathbb{N}$

Фиксирајмо неку $k \in \mathbb{N}$ и посматрајмо шта се дешава са функционалом f_k :

$$f_k(e_1 + \dots + e_{2n}) = 0 \quad \text{за } n \geq k+1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f_k(e_1 + \dots + e_{2n}) = 0 \quad \text{за све } k \in \mathbb{N}$$

$\leadsto$ единственный кандидат за общий предел ряда $(c_1 + \dots + c_{2n})_n$ у $\mathcal{C}^\infty$ — $(0, 0, \dots, 0)$.

Нeka je $f \in \mathcal{B}(\mathcal{C}^\infty, \mathbb{C})$ произвольн и поcматpим $f_0 := f|_{\mathcal{C}_0} : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathbb{C}$. Ясно, важи $f_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{C}_0, \mathbb{C})$. Раньше cмо видели, да je $(\mathcal{C}_0)^* \cong \mathcal{C}_1$.

$$\Rightarrow (\exists b = (b_n)_n \in \mathcal{C}_1) \quad f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n b_n, \text{ за cвc } x = (x_n)_n \in \mathcal{C}_0$$

$c_1 + \dots + c_{2n} \in \mathcal{C}_0$, за cвc $n \in \mathbb{N}$!

$$\leadsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f(c_1 + \dots + c_{2n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_0(c_1 + \dots + c_{2n}) = b_1 + \dots + b_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 = f_0(0) = f(0)$$

$\nwarrow \quad \nearrow$
 $b \in \mathcal{C}_1! \quad (0, 0, \dots, 0, \dots)$

$$\Rightarrow w\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} (c_1 + \dots + c_{2n}) = (0, 0, \dots, 0, \dots)$$

□