

X - векторски простор над телом $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

дэф: $\Phi: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ је сесквилинеарна форма на X ако $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ и $f, g, h \in X$ важи:

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha f + \beta g, h) &= \alpha \Phi(f, h) + \beta \Phi(g, h) \\ \Phi(f, \alpha g + \beta h) &= \overline{\alpha} \Phi(f, g) + \overline{\beta} \Phi(f, h)\end{aligned}$$

линеарност по првој и антилинеарност по другој променљивој

ако је форма линеарна (уместо антилинеарна) по 2. променљивој, кажемо да је билинеарна

* ознака: $\langle f, g \rangle_{\Phi} := \Phi(f, g)$

* свакој сесквилинеарној форми се придружује одговарајућа квadratна форма:
 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{K}$

$$\varphi(f) = \langle f, f \rangle_{\Phi} \quad (\text{означавамо и са } [f]_{\Phi})$$

приметимо да важи: $[\alpha f]_{\Phi} = \langle \alpha f, \alpha f \rangle_{\Phi} = |\alpha|^2 \langle f, f \rangle_{\Phi} = |\alpha|^2 [f]_{\Phi}$

СТАВ: (правило паралелограма): За сваку квадратну форму $[\cdot]_{\Phi}$ важи:
 $[f+g]_{\Phi} + [f-g]_{\Phi} = 2[f]_{\Phi} + 2[g]_{\Phi}$, за све $f, g \in X$
директна последица *

СТАВ: (поларизациони идентитет) За сваку сесквилинеарну форму $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Phi}$ на компл. ВП X важи:

$$\langle f, g \rangle_{\Phi} = \frac{1}{4} ([f+g]_{\Phi} - [f-g]_{\Phi} + i[f+ig]_{\Phi} - i[f-ig]_{\Phi}), \quad \text{за све } f, g \in X$$

дэф: Сесквилинеарна форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Phi}$ назива се хермитском ако је
 $\langle g, f \rangle_{\Phi} = \overline{\langle f, g \rangle_{\Phi}}$, за све $f, g \in X$

СТАВ: За комплексан ВП X следеће је еквивалентно:

1° $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Phi}$ је хермитска сесквилинеарна форма

2° $[\cdot, \cdot]_{\mathbb{F}}$ је реална квадратна форма ($[f]_{\mathbb{F}} \in \mathbb{R}$ за све $f \in X$)

3° $\operatorname{Re} \langle f, g \rangle_{\mathbb{F}} = \frac{1}{4} ([f+g]_{\mathbb{F}} - [f-g]_{\mathbb{F}})$, $f, g \in X$

4° $\operatorname{Im} \langle f, g \rangle_{\mathbb{F}} = \frac{1}{4} ([f+ig]_{\mathbb{F}} - [f-ig]_{\mathbb{F}})$, $f, g \in X$

деф: Квадратна форма $[\cdot, \cdot]_{\mathbb{F}}$ назива се **позитивном**, а **пона сесквилинеарна** форма

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{F}}$ **предскаларним производом** ако је $[f]_{\mathbb{F}} \geq 0$ за све $f \in X$.

Ако је још и $[f]_{\mathbb{F}} > 0$ за све $f \neq 0$, форма $[\cdot, \cdot]_{\mathbb{F}}$ се назива **строго позитивном**, а $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{F}}$ **скаларним производом**.

СТАВ: (Коши-Шварцова неједнакост) За предскаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{F}}$ на X важи

$$|\langle f, g \rangle_{\mathbb{F}}| \leq \sqrt{\langle f, f \rangle_{\mathbb{F}}} \cdot \sqrt{\langle g, g \rangle_{\mathbb{F}}}$$

деф: Сесквилинеарна форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{F}}$ деф. на нормираном векторском простору X назива се **ограниченом** уколико је $\|\Phi\| := \sup_{\|f\|=\|g\|=1} |\langle f, g \rangle_{\mathbb{F}}| < +\infty$ и на овај начин дефинишемо **норму** сесквилинеарне форме.

* важи: $|\langle f, g \rangle_{\mathbb{F}}| \leq \|\Phi\| \cdot \|f\| \cdot \|g\|$, за све $f, g \in X$, као и

$$\|\Phi\| = \inf \{ C > 0 \mid |\langle f, g \rangle_{\mathbb{F}}| \leq C \cdot \|f\| \cdot \|g\| \text{ за све } f, g \in X \}$$

* Слично се за квадратну форму $[\cdot, \cdot]_{\mathbb{F}}$ каже да је **ограничена** ако је $\|\psi\| := \sup_{\|f\|=1} |[f]_{\mathbb{F}}| < +\infty$

Т: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = g \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, g_n \rangle_{\mathbb{F}} = \langle f, g \rangle_{\mathbb{F}}$ за ограничену сесквилинеарну форму на X .

Ограничене сесквилинеарне форме су непрекидне функције!

* Ако је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ на H , онда је са $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ дефинисана норма индукована скаларним производом на H .

* Ако је H Банахов простор у норми индукованој скаларним производом, онда се H назива **Хилбертов простор**.

* $\|\langle \cdot, \cdot \rangle\| = 1 \leadsto \langle \cdot, \cdot \rangle$ је ограничен, норме 1 и непрекидан као функција две променљиве

$$\sup_{\|f\|=\|g\|=1} |\langle f, g \rangle| \leq \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \sqrt{\langle f, f \rangle} \sqrt{\langle g, g \rangle} = \sup_{\|f\|=\|g\|=1} \|f\| \cdot \|g\| = 1$$

ако узмемо $f=g$, достиже се норма: $|\langle f, f \rangle| = \|f\|^2 = 1$

примери (1) $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

скаларни производ:

$$\langle z, w \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \cdot \overline{w_k}$$

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k|^2}$$

(2) ℓ^2 низови: $(z = (z_n)_{n=1}^{+\infty}) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|^2 < \infty$

скаларни производ: $\langle z, w \rangle_{\ell^2} := \sum_{n=1}^{+\infty} z_n \overline{w_n}$

индукована норма је ℓ^2 -норма $\Rightarrow \ell^2$ је Хилбертов

(3) $L^2(X, \mu)$

$\langle f, g \rangle = \int_X f \overline{g} d\mu$ - скаларни производ,

индукована норма је L^2 -норма! $\Rightarrow L^2$ је Хилбертов

* **Ортогоналност у Хилбертовом простору**

деф: f и g су **ортогонални** ($f \perp g$) ако је $\langle f, g \rangle = 0$

Скупови F и G су **ортогонални** ($F \perp G$) ако $\forall f \in F, \forall g \in G \ f \perp g$

Ортогонални комплемент скupa F (F -ортогонални) је скуп

$$F^\perp = \{ h \in H \mid \langle f, h \rangle = 0 \text{ за све } f \in F \}$$

* $G \leq H$ (затворен потпростор) $\Rightarrow H = G \oplus G^\perp$

затворен!

Т: (о ортогоналној пројекцији) Нека је $L \leq H$. Тада се сваки $h \in H$ на једнозначан начин представља у облику $h = f + g$, т.д. $f \in L, g \in L^\perp$ и при томе важи $\|g\| = d(h, L)$.

Т: (Рисова о репрезентацији лин. функционала) Сваки ограничени, линеарни функционал g^* на H може се једнозначно представити као скаларно множење $\langle \cdot, g \rangle$ одређеним $g \in H$ и при томе важи $\|g^*\| = \|g\|$.

① Нeka је H Хилбертов простор, $a \in H \setminus \{0\}$ и $L = \{\lambda \cdot a, \lambda \in \mathbb{C}\}$. Показати да важи

$$d(x, L^\perp) = \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|a\|}, \text{ за свако } x \in H$$

$L = \mathbb{C} \cdot a \Rightarrow \dim L = 1 \Rightarrow L$ је затворен! (јер је $\dim L < +\infty$)

Нека је $x \in H$ произвољно. Т. о ортогопројекцији $\Rightarrow \exists! s \in \mathbb{C}$ и $b \in L^\perp$ т.д. $x = s \cdot a + b$
 $\leadsto d(x, L^\perp) = \|x - b\| = \|s \cdot a\| = |s| \cdot \|a\|$ *

Пaве, приметимо: $\langle x, a \rangle = \langle s \cdot a + b, a \rangle$
 $= \langle s \cdot a, a \rangle + \underbrace{\langle b, a \rangle}_{=0 \text{ (} a \in L, b \in L^\perp \text{)}}$
 $= s \cdot \langle a, a \rangle$

$$\Rightarrow |\langle x, a \rangle| = |s| \cdot \|a\|^2$$

$$\Rightarrow |s| = \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|a\|^2} \quad (a \neq 0)$$

$$* \Rightarrow d(x, L^\perp) = |s| \cdot \|a\| = \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|a\|}$$

□

② Нeka је $n \in \mathbb{N}$ фиксирано и $L = \left\{ x = (x_k)_k \in \mathbb{C}^2 \mid \sum_{k=1}^n x_k = 0 \right\}$. Израчунајте $d(e_1, L)$.

$d(e_1, L) = \inf_{x \in L} \|e_1 - x\|_2$ - ово је деф. растојања вектора од скупа

Желимо да користимо Т. о ортогопројекцији. За то је неопходно да прво докажемо да је L затворен. Један начин на који то можемо да урадимо је да нађемо $f \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ т.д. је $\mathcal{N}(f) = L$
 $f^{-1}(\{0\})$ - век затворен за непрекидно f

Нека је $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k$, за $x = (x_k)_k \in \mathbb{C}^2$

f добро деф. и линеаран и

f ограничен: $|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k|$
 $= \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot 1$

$$\xrightarrow{\text{КОШИ-ШВАРЦ}} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n 1^2}$$

$$\leq \|x\|_2 \cdot \sqrt{n}$$

$\leadsto f \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$, $\|f\| \leq \sqrt{n}$ и јасно је $f^{-1}(\{0\}) = L$
 $\Rightarrow L$ је затворен.

Пaве, приметимо: $L = \left\{ x \in \mathbb{C}^2 \mid \langle x, \underbrace{(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)}_{n \text{ јединица}} \rangle = 0 \right\}$

$$= \left\{ (1, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots) \right\}^\perp$$

$$= \left\{ e_1 + \dots + e_n \right\}^\perp$$

Такође, $L^\perp = \left(\left\{ e_1 + \dots + e_n \right\}^\perp \right)^\perp = \overline{\text{Lin} \{ e_1 + \dots + e_n \}} = \left\{ (c, c, \dots, c, 0, 0, \dots) \mid c \in \mathbb{C} \right\}$

$$M^{\perp\perp} = \overline{\text{Lin} M}$$

Т. о ортогоналности $\Rightarrow \exists! x \in L$ и $y \in L^\perp$ т.д. $e_1 = x + y$

$$\leadsto e_1 = x + c(e_1 + \dots + e_n), \quad c \in \mathbb{C}$$

$$\langle x, c(e_1 + \dots + e_n) \rangle = 0$$

$$\leadsto \langle c_1, c(e_1 + \dots + e_n) \rangle = \langle c(e_1 + \dots + e_n), c(e_1 + \dots + e_n) \rangle$$

$$\quad \quad \quad = |c|^2 \cdot n \quad (*)$$

Приметимо такође да је $c \neq 0$ јер $e_1 \notin L$

$$(*) \quad c = |c|^2 \cdot n \Rightarrow c > 0 \quad (c \in \mathbb{R}!)$$

$$\Rightarrow c = c^2 \cdot n \Rightarrow c = \frac{1}{n}$$

$$d(e_1, L) = \|e_1 - x\|_2 = \left\| \frac{1}{n}(e_1 + \dots + e_n) \right\|_2 = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

□

③. Нека је $M = \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{C}^2 \mid \sum_{n=1}^{12} x_n = \sum_{n=1}^5 x_n = \sum_{n=1}^{2013} x_n = 0 \right\}$. Определи $M^\perp, (M^\perp)^\perp$ и $d(y, M)$, где је $y = (12, 5, 2013, 0, 0, \dots)$.

Приметимо: $M = \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{C}^2 \mid \langle x, \underbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots)}_{12} \rangle = \langle x, \underbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots)}_5 \rangle = \langle x, \underbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots)}_{2013} \rangle = 0 \right\}$

Нека је $h_1 = \underbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots)}_{12}$

$$h_2 = \underbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots)}_5$$

$$h_3 = \underbrace{(1, \dots, 1, 0, \dots)}_{2013}$$

$$\leadsto M = \left\{ x = (x_n)_n \in \mathbb{C}^2 \mid \langle x, h_1 \rangle = \langle x, h_2 \rangle = \langle x, h_3 \rangle = 0 \right\}$$

$$= \left\{ h_1, h_2, h_3 \right\}^\perp \leadsto M \text{ је затворен (сваки ортогонал је затворен)}$$

$$\Rightarrow M^\perp = \left\{ h_1, h_2, h_3 \right\}^{\perp\perp} = \overline{\text{Lin} \{ h_1, h_2, h_3 \}}$$

$$= \text{Lin} \{ h_1, h_2, h_3 \} \quad (\dim M^\perp = 3)$$

Дакле, $M^{\perp\perp} = (\text{Lin} \{ h_1, h_2, h_3 \})^\perp = \left\{ h_1, h_2, h_3 \right\}^\perp$

$$F^\perp = (\text{Lin} F)^\perp = (\overline{\text{Lin} F})^\perp$$

$$T. \text{ o } \text{ortoprojeksiiji} \Rightarrow \mathbb{C}^2 = \underbrace{\{h_1, h_2, h_3\}^\perp}_M \oplus \underbrace{\text{Lin}\{h_1, h_2, h_3\}}_{M^\perp}$$

$$\leadsto y = y_M + y_{M^\perp} = y_M + \alpha h_1 + \beta h_2 + \gamma h_3, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

$\langle \cdot, h_1 \rangle$
 $\langle \cdot, h_2 \rangle$
 $\langle \cdot, h_3 \rangle$

$$\leadsto 2036 = \langle y, h_1 \rangle = 18\alpha + 5\beta + 18\gamma$$

$$2036 = \langle y, h_2 \rangle = 5\alpha + 5\beta + 5\gamma$$

$$2036 = \langle y, h_3 \rangle = 18\alpha + 5\beta + 2018\gamma$$

$$\leadsto 1995\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

$$18\alpha + 5\beta = 2036$$

$$5\alpha + 5\beta = 2036$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{2036}{5}$$

$$\leadsto y = y_M + \frac{2036}{5} h_2$$

$$d(y, M) = \|y - y_M\| = \left\| \frac{2036}{5} h_2 \right\| = \frac{2036}{5} \cdot \sqrt{5}$$

□

④ Нeka $j \in M = \left\{ f \in L^2(0, 2) \mid \int_0^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx \right\}$. Определим $M^\perp$, $M^{\perp\perp}$ и $d(g, M^\perp)$ ako je $g(x) \equiv 1$.

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx = 0, \text{ tj. } \int_0^2 f(x) \cdot \overline{h_1(x)} dx, \text{ ako je}$$

$$h_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ -1, & x \in (1, 2] \end{cases}$$

($h_1 \in L^2$ и)

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx = 0$$

$$\langle f, h_2 \rangle, \quad h_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2, & x \in (\frac{1}{2}, 1] \\ 1, & x \in (1, 2] \end{cases}$$

$$\leadsto M = \{h_1, h_2\}^\perp \quad (M \text{ je затворен као ортогонал})$$

$$\Rightarrow M^\perp = \{h_1, h_2\}^{\perp\perp} = \overline{\text{Lin}\{h_1, h_2\}} = \text{Lin}\{h_1, h_2\}$$

$$\text{Сумма, } M^{\perp\perp} = \text{Lin}\{h_1, h_2\}^\perp = \{h_1, h_2\}^\perp$$

$$T. \text{ о ортогонализации} \Rightarrow L^2(0,2) = M \oplus M^\perp \\ = \{h_1, h_2\}^\perp \oplus \text{Lin}\{h_1, h_2\}$$

$$g \in L^2(0,2) \rightsquigarrow g = g_M + \alpha \cdot h_1 + \beta \cdot h_2 \quad \begin{matrix} \langle \cdot, h_1 \rangle \\ \langle \cdot, h_2 \rangle \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 0 = \int_0^2 h_1(x) dx = \alpha \cdot \int_0^2 1 dx = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 0 \\ 2 = \int_0^2 h_2(x) dx = \beta \cdot 3 \Rightarrow \beta = \frac{2}{3} \end{cases} \rightsquigarrow g = g_M + \frac{2}{3} \cdot h_2$$

$$\rightsquigarrow d(g, M^\perp) = \|g_M\| = \sqrt{\|g\|^2 - \|\frac{2}{3} \cdot h_2\|^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{9} \cdot 3} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Питагорина Т.

$$g_1 \perp g_2 \Rightarrow \|g_1 + g_2\|^2 = \|g_1\|^2 + \|g_2\|^2 //$$

□

5. Изračунати $\min_{a,b,c \in \mathbb{C}} \int_0^1 \frac{|ax^3 + x^2 + bx + c|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Нека је $X = L^2([0,1], \mu)$, при чему је μ комплексна мера дефинисана са

$$\mu(E) = \int_E \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall E \subseteq [0,1] \text{ Лабел мерења}$$

X је Хилбертов простор (сваки L^2 је Хилбертов!)

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 \frac{f(x) \cdot \overline{g(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\rightsquigarrow \|f\| = \sqrt{\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx}$$

$$\Rightarrow d(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx}$$

$$\text{Нас интересује } \min_{a,b,c \in \mathbb{C}} \int_0^1 \frac{|ax^3 + x^2 + bx + c|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \min_{a,b,c \in \mathbb{C}} \int_0^1 \frac{|x^2 - (-ax^3 - bx - c)|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\min_{a,b,c \in \mathbb{C}} (d(x^2, -ax^3 - bx - c))^2$$

!!
m

Уочимо функције: $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^3$ и $M = \text{Lin}\{f_1, f_2, f_3\}$
 $\leadsto M = \{ax^3 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$
 $\uparrow$ затворен ($\dim M < +\infty$)

$$d(x, M) = \min_{y \in M} d(x, y) = \min_{a,b,c \in \mathbb{C}} d(x, ax^3 + bx + c)$$

// Желимо да искористимо Т. о ортогоналности и представимо x^2 као $\underbrace{\quad}_M + \underbrace{\quad}_{M^\perp}$ //

$$X = M \oplus M^\perp \leadsto x^2 = c + bx + ax^3 + x_{M^\perp} \quad \text{НАМА ЗАПРАВО ТРЕБА } \|x_{M^\perp}\|$$

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, 1 \rangle \\ \langle \cdot, x \rangle \\ \langle \cdot, x^3 \rangle \end{aligned}$$

$$\langle 1, x \rangle = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2x dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = 1$$

$$\begin{aligned} \langle 1, x^3 \rangle &= \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 1-t \\ t = 1-x^2 \\ dt = -2x dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{t} dt \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\langle x, x \rangle = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \leadsto x = \sqrt{t} \\ dt = 2x dx \end{array} \right\} = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} \cdot (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1+1)} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

БЕТА ФУНКЦИЈА:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

ГАМА ФУНКЦИЈА:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1$$

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\begin{aligned} \langle x, x^3 \rangle &= \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin \theta \\ dx = \cos \theta d\theta \end{array} \right\} \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta}} \cdot \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta = \dots = \frac{3\pi}{16}$$

$$\langle x^3, x^3 \rangle = \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta = \dots = \frac{5\pi}{32}$$

Слично, с тим што се користи и $\cos^3 u = \frac{3\cos u + \cos 3u}{4}$

$$\langle x^2, 1 \rangle = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \langle 1, x \rangle = \frac{\pi}{4}$$

$$\langle x^4, x \rangle = \int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx = \langle 1, x^3 \rangle = \frac{2}{3}$$

$$\langle x^2, x^3 \rangle = \int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 1-t \\ t = 1-x^2 \\ dt = -2x dx \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{\sqrt{t}} dt = \dots = \frac{8}{15}$$

Може и лакше: преко β и Γ ф-ја:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \leadsto x = \sqrt{t} \\ dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \end{array} \right.$$

$$= \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \cdot \beta\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(4)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{3 \cdot 2 \cdot \Gamma(2)}$$

$$= \frac{5}{32} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi}}{1} = \frac{5\pi}{32}$$

$$* \langle x^2, 1 \rangle = c \cdot \langle 1, 1 \rangle + b \cdot \langle x, 1 \rangle + a \cdot \langle x^3, 1 \rangle \leadsto \frac{\pi}{4} = c \cdot \frac{\pi}{2} + b + a \cdot \frac{2}{3}$$

$$\langle x^2, x \rangle = c \cdot \langle 1, x \rangle + b \cdot \langle x, x \rangle + a \cdot \langle x^3, x \rangle \leadsto \frac{2}{3} = c + b \cdot \frac{\pi}{4} + a \cdot \frac{3\pi}{16}$$

$$\langle x^2, x^3 \rangle = c \cdot \langle 1, x^3 \rangle + b \cdot \langle x, x^3 \rangle + a \cdot \langle x^3, x^3 \rangle \leadsto \frac{8}{15} = c \cdot \frac{2}{3} + b \cdot \frac{3\pi}{16} + a \cdot \frac{5\pi}{32}$$

: израчунају се a, b, c

$$m = (d(x, M))^2 = \|x_M\|^2 = \|x^2\|^2 - \|c + bx + ax^3\|^2 = \dots$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int_0^1 \frac{|a + bx + cx^3|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

□

Подношка:

Т. (Рисова о РЕПРЕЗЕНТАЦИЈИ ЛИН. ФУНКЦИОНАЛА) Сваки ограничен, линеаран функционал g^* из H може се једнозначно представити као скаларно множење $\langle \cdot, g \rangle$ одређеним $g \in H$ и при томе важи $\|g^*\| = \|g\|$.

⑥ Нeka је H Хилбертов простор и $A: H \rightarrow H$ линеаран оператор који задовољава услов $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$, за све $x, y \in H$. Приказати $A \in \mathcal{B}(H)$.

Овај услов заправо значи A је самоадијунгован

A^* је адијунгован оператор од A ако за све $f, g \in H$ важи $\langle Af, g \rangle = \langle f, A^*g \rangle$

$A^* = A \Rightarrow A$ је самоадијунгован

За свако $x \in H$ дефинишемо $\lambda_x: H \longrightarrow \mathbb{C}$, $\lambda_x(y) = \langle y, Ax \rangle$, за све $y \in H$.

1° λ_x линеаран и (из особина скаларног производа)

2° λ_x ограничен:

$$|\lambda_x(y)| = |\langle y, Ax \rangle| \stackrel{k-ш}{\leq} \|y\| \cdot \|Ax\|, \text{ за све } y \in H$$

$$\Rightarrow \lambda_x \in \mathcal{B}(H, \mathbb{C}), \quad \|\lambda_x\| \leq \|Ax\|$$

$$\text{Рисва Т.} \Rightarrow \underline{\|\lambda_x\| = \|Ax\|}, \text{ за све } x \in H$$

$$\text{Дакле, приметимо: } \sup_{\|x\| \leq 1} |\lambda_x(y)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle y, Ax \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Ay, x \rangle|$$

$$\stackrel{k-ш}{\leq} \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ay\| \cdot \|x\| \leq \|Ay\| < +\infty$$

за произв. $y \in H$

$\leadsto$ фамилија огр. функционала $\{\lambda_x \mid \|x\| \leq 1\}$ је ограничена тачка по тачка

$$\stackrel{п.т.о.}{\Rightarrow} \sup_{\|x\| \leq 1} \|\lambda_x\| < +\infty$$

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \|A\| \Rightarrow A \in \mathcal{B}(H).$$

□

апсолутно непрекидне функције

⑦ Нека је дат скуп $H = \{f \in AC[0,1] \mid f' \in L^2[0,1]\}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle: H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\langle f, g \rangle = f(0) \cdot \overline{g(0)} + \int_{[0,1]} f'(x) \cdot \overline{g'(x)} d\mu(x), \text{ за све } f, g \in H.$$

(а) Показати да је $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Хилбертов простор.

(б) Нека је $F: H \longrightarrow \mathbb{C}$ дефинисан са $F(f) = f(1)$ за све $f \in H$. Показати да је $F \in \mathcal{B}(H, \mathbb{C})$, одредити $g \in H$ т.д. $F(f) = \langle f, g \rangle$ за све $f \in H$ и израчунати $\|F\|$.

(а) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ је скаларни производ:

0° добро деф. - важи због Коши-Шварцово неједнакости и чињенице да $y f' g' \in L^2$

1° $f \in H, \langle f, f \rangle = 0 \stackrel{?}{\Rightarrow} f = 0$

$$\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow |f(0)|^2 + \int_{[0,1]} |f'(x)|^2 d\mu(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(0) = 0 \text{ и } \int_{[0,1]} |f'(x)|^2 d\mu(x) = 0 \Rightarrow f' = 0 \text{ [м] c.c.}$$

$$\leadsto f(x) - f(0) = \int_{[0,x]} f'(x) dm(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1].$$

Остаток аксиоме се једноставно проверавају.

Комплетност: Норма на H индексована са $\langle \cdot, \cdot \rangle$ је

$$\|f\| = \sqrt{|f(0)|^2 + \int_{[0,1]} |f'(x)| dm(x)}, \quad \text{за } f \in H$$

Нека је $(f_n)_n$ Кошијев низ у H и $\varepsilon > 0$ произвољно.

$$\leadsto (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq n_0) \|f_n - f_m\| = \sqrt{|f_n(0) - f_m(0)|^2 + \int_{[0,1]} |f'_n - f'_m| dm(x)} < \varepsilon$$

Од овде можемо закључити и да су низови $(f_n(0))_n$ и $(f'_n)_n$ Кошијеви низови у $\mathbb{C}$, односно у $L^2[0,1]$, редом. Ова ова простора су комплетни,

па важи: $\exists c \in \mathbb{C} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = c$

$$\exists g \in L^2[0,1] \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f'_n - g\|_2 = 0$$

Конструисамо функцију која је кандидат за лимес:

$$f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f(x) = c + \int_{[0,x]} g(t) dm(t), \quad \text{за } x \in [0,1]$$

(1) $f \in H$: $m[0,1] < +\infty!$

$$\left. \begin{array}{l} g \in L^2[0,1] \Rightarrow g \in L^1[0,1] \Rightarrow f \in AC[0,1] \\ + \quad f' = g \in L^2[0,1] \end{array} \right\} \Rightarrow f \in H$$

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0$:

$$\|f_n - f\|^2 = |f_n(0) - f(0)|^2 + \int_{[0,1]} |f'_n - f'|^2 dm = |f_n(0) - c|^2 + \int_{[0,1]} |f'_n - g|^2 dm$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0$$

$$\Rightarrow (H, \|\cdot\|) \text{ је Банахов}$$

$$\Rightarrow (H, \langle \cdot, \cdot \rangle) \text{ је Хилбертов.}$$

5) F добро дефиниран и линеарен и

F ограничен.

$$|F(f)| = |f(0)| = \left| f(0) + \int_{[0,1]} f' dm \right| \leq |f(0)| + \int_{[0,1]} |f'| dm$$

Колум-Шварц $\leq \sqrt{|f(0)|^2} + \sqrt{\int_{[0,1]} |f'|^2 dm}$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{a+b}$, $a, b \geq 0$ $\leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{|f(0)|^2 + \int_{[0,1]} |f'|^2 dm} = \sqrt{2} \cdot \|f\|$

$$\Rightarrow F \in \mathcal{B}(H, \mathbb{C}), \quad \|F\| \leq \sqrt{2}$$

Покаже т. $\rightsquigarrow (\exists, g \in H) \quad F(f) = \langle f, g \rangle$ за сите $f \in H$ и важи $\|F\| = \|g\|$

Треба да најдеме g :

$$\int_{[0,1]} f'(x) dx = f(1) = F(f) = \langle f, g \rangle = \int_{[0,1]} f' \cdot \overline{g} dm$$

Пака, треба да најдеме $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ т.е. $g(0)=1$ и $g'(x)=1$ за $x \in [0,1]$.

$\rightsquigarrow g(x) = x+1$

$$\|F\| = \|g\| = \sqrt{|g(0)|^2 + \int_{[0,1]} |g'|^2 dm} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

□

8) Најди ајунговани оператор оператора A :

(a) $H = L^2(0,1)$, $A: H \rightarrow H$

$$Af(x) = xf(x)$$

Покажемо прво, да A е ограничен:

Ово раѓамо јер A е ајунгован оператор ограниченог оператора единствено одреден

$$\|Af\|_2^2 = \int_{(0,1)} |xf(x)|^2 dx \leq \int_{(0,1)} |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 \rightsquigarrow A \in \mathcal{B}(H), \quad \|A\| \leq 1$$

Определуваме A^* :

$$\langle Af, g \rangle = \int_{(0,1)} xf(x) \overline{g(x)} dx = \int_{(0,1)} f(x) \overline{xg(x)} dx = \langle f, Ag \rangle, \quad \text{за сите } f, g \in H$$

$\rightsquigarrow A^* = A!$ (т.е. A е самоајунгован)

$$(5) A: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$A(x, y) = (x + 2y, 3x + y)$$

$$\langle A(x, y), (z, t) \rangle = \langle (x + 2y, 3x + y), (z, t) \rangle$$

$$= zx + 2zy + 3xt + yt$$

$$= x(z + 3t) + y(2z + t)$$

$$= \langle (x, y), (z + 3t, 2z + t) \rangle = \langle (x, y), A^*(z, t) \rangle$$

$$\leadsto A^*(x, y) = (x + 3y, 2x + y), \text{ за све } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

□

Напомена: Да ли су оператори из претходног задатка нормални?

$$(\text{Да ли је } AA^* = A^*A?)$$

$$(a) A = A^* \Rightarrow AA^* = A^2 = A^*A, \text{ тј. оператор } A \text{ је нормалан}$$

$$(b) AA^*(x, y) = A(x + 3y, 2x + y) = (x + 3y + 4x + 2y, 3x + 9y + 2x + y) \\ = (5x + 5y, 5x + 10y)$$

$$A^*A(x, y) = A^*(x + 2y, 3x + y) = (x + 2y + 3x + 3y, 2x + 4y + 3x + y) \\ = (10x + 5y, 5x + 5y)$$

$$\leadsto AA^* \neq A^*A, \text{ тј. оператор } A \text{ није нормалан!}$$