

БАНАХОВИ ПРОСТОРИ

НОРМА

ПОДСЕЋАЊЕ: НОРМИРАНИ ВЕКТОРСКИ ПРОСТОР је структура $(X, +, \|\cdot\|, 0)$, где је

(1) $(X, +, 0)$ векторски простор

(2) $(X, +, \|\cdot\|, 0)$ нормирана група

(3) $(\forall x \in X)(\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})) \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

$(X, +, \|\cdot\|, 0)$ је нормирана група ако је

(1) $(X, +, 0)$ група

(2) $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ функција која има следеће особине:

1° $(\forall x \in X) \|x\| \geq 0$;

$\|x\| = 0 \iff x = 0$

2° $(\forall x \in X) \| -x \| = \|x\|$

3° $(\forall x, y \in X) \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Норма $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ индукује транслаторно инваријантну метрику на X :

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

$$d(x+a, y+a) = d(x, y)$$

$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ функција т.д. важи:

(1) $(\forall x, y \in X) d(x, y) \geq 0$

$d(x, y) = 0 \iff x = y$

(2) $(\forall x, y \in X) d(x, y) = d(y, x)$

(3) $(\forall x, y, z \in X)$

$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

$\leadsto (X, d)$ је метрички простор

деф: Метрички простор (X, d) је **комплетан** ако је сваки Кошијев низ у њему конвергентан.

НАПОМЕНА: Сваки конвергентан низ је свакако Кошијев:

п.н. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Тда важи $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$

Насл $n, m \geq n_0$: $d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

деф: Комплетан нормирани векторски простор се назива **Банаховим простором**.

$(X, \|\cdot\|)$ комплетан нормиран ВП $\iff (X, d)$ комплетан
метрика индукована нормом $\|\cdot\|$

деф: (1) Ред $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ је **конвергентан** (у X) ако $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k \in X$

(2) Ред $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ је **апсолутно конвергентан** ако $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \|x_k\| \in \mathbb{R}$

Т: Нормиран векторски простор X је Банахов ако је сваки апсолутно конвергентан ред у њему конвергентан.

Особине норме: (1) $\|x_1 + \dots + x_n\| \leq \|x_1\| + \dots + \|x_n\|$, за $x_1, \dots, x_n \in X$ - УОПШТЕНА НЕЈЕДНАКОСТ Δ

(2) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$, $x, y \in X$, т.ј. норма је Липшицово пресликавање са Лип. константом 1.

Основна неједнакост: $(X, \|\cdot\|)$ Банахов, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ апсолутно конв. $\Rightarrow \|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$

$$\Delta: \|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\sum_{k=1}^n x_k\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\sum_{k=1}^n x_k\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \|x_k\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$$

непр. норма нејед. Δ

Примери: (1) поле скалара $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ је Банахов простор

(2) $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Банахов простор, $X \neq \emptyset$. Дефинишемо:

$$B(X, Y) := \left\{ f: X \rightarrow Y \mid \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y < \infty \right\} - \text{ограничена пресликавање из } X \text{ у } Y$$

векторски простор, са операцијама наслеђеним из кодомена Y :

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y - \text{норма на } B(X, Y)$$

$(B(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$ је Банахов простор:

Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ апсолутно конвергентан ред, у $B(X, Y)$

Нека је $x \in X$ произвољно, тада важи $\|f_n(x)\|_Y \leq \|f_n\|_\infty$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(x)\|_Y < \infty \quad (\text{поређени критеријум})$$

Y Банахов $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ конвергира (у Y)

Нека је $f: X \rightarrow Y$ дефинисано са $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

1° $f \in B(X, Y)$:

$$\|f(x)\|_Y = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right\|_Y \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(x)\|_Y \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = M < \infty, \text{ за произв. } x \in X$$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq M, \text{ тј. } f \in B(X, Y)$$

$$2^\circ \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \text{ у } (B(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k$$

$$0 \leq \|f - \sum_{k=1}^n f_k\|_\infty = \sup_{x \in X} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right\|_Y = \sup_{x \in X} \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right\|_Y \leq \sup_{x \in X} \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k(x)\|_Y$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ред конв.}} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=1}^n f_k\|_\infty = 0, \text{ тј. } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k = f \text{ у } (B(X, Y), \|\cdot\|_\infty)$$

$$\Rightarrow (B(X, Y), \|\cdot\|_\infty) \text{ је Банахов.}$$

(4) Y Банахов

$B(\mathbb{N}, Y) =: C^\infty(Y)$ - простор ограничених низова је Банахов простор

$$\|(a_n)_n\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\|_Y$$

нпр. пресликавање из X у Y

(5) X компактан метрички простор, Y Банахов $\Rightarrow C(X, Y)$ је Банахов, као

затворен потпростор од $B(X, Y)$

затворен потпростор комплетног простора је комплетан

(6) $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$ - Банахови (у односу на p -норму $\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_X |f|^p d\mu}$)

(7) Y Банахов - $\ell^p(Y)$ - Банахови, норма: $\|(x_n)_n\|_p = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_Y^p}$

(8) $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ је Банахов ($\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$):

Нека је $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Кошијев низ у $C[a, b]$ и нека је $\varepsilon > 0$, произвољно.

$$\leadsto (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \quad \|f_m - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ за све } m, n \geq n_0, \text{ тј.}$$

$$(*) \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ за све } m, n \geq n_0 \text{ и све } x \in [a, b].$$

Одговарајуће можемо приметити да је, за фиксирано $x \in [a, b]$, $(f_n(x))_n$ Кошијев низ у $\mathbb{C}(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$. На овај начин је дефинисана пресликавање $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, са $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

1° Низ $(f_n)_n$ равномерно конвергира ка f :

$$\text{пуштањем } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{ у } (*) \text{ добијамо } |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ за све } m \geq n_0 \text{ и све } x \in [a, b]$$

2° $f \in C[a, b]$:

Равномерни лимес непрекидних функција мора бити непрекидна функција: (анализа 2)

$f_{n_0} \in C[a, b] \Rightarrow f_{n_0}$ је равномерно непрекидно на $[a, b]$

$$\Rightarrow (\exists \delta > 0) (\forall (x, y) \in [a, b]) \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad 2^\circ$$

$$\begin{aligned} |x - y| < \delta: |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y) + f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leq 2 \max_{x \in [a, b]} |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| \\ &\stackrel{1^\circ + 2^\circ}{\leq} \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ је равномерно непрекидна на $[a, b]$.

① Нека је X нормиран векторски простор. Показати:

$$C^\infty(X) \text{ Банахов} \Rightarrow X \text{ Банахов} \quad (\Leftarrow \text{ смо већ раније видели})$$

РЕШЕЊЕ: Нека је $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ произвољан Кошијев низ у X и дефинишимо $x^{(n)} := (x_n, 0, 0, \dots) \in C^\infty(X)$

Дакле, очигледно је $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ Кошијев низ у $C^\infty(X) \Rightarrow$ конвергира, тј. $\exists a = (a_n)_n \in C^\infty(X) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{(n)} - a\|_\infty = 0$. Одговарајуће следи конвергенција по координатама, тј. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_i^{(n)} - a_i\| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a_i\| = 0$
 $\uparrow$ по првој координати, норма у X

$\Rightarrow (x_n)_n$ конвергира у $X \Rightarrow X$ је Банахов



② Нека је X Банахов простор. Доказати да је $c(X)$ такође Банахов простор (са нормом $\|\cdot\|_\infty$)

РЕШЕЊЕ: Докажимо да је $c(X) \subset C^\infty(X)$ затворен потпростор, odakle из чињенице да је за X Банахов $C^\infty(X)$ такође Банахов директно добијемо тражени резултат.

Нека је $(x^{(n)})_n$ произвољан низ у $c(X)$ и $x \in C^\infty(X)$ низ т.д. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{(n)} - x\|_\infty = 0$

Довољно је доказати $x \in c(X)$. Конвергенција у $\|\cdot\|_\infty$ норми повлачи конвергенцију по координатама $\rightarrow (\forall k \in \mathbb{N})(\exists x_k \in X) \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_k^{(n)} - x_k\|_X = 0$.

Покажимо да је низ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан у X : Како је X Банахов, довољно је доказати да је $(x_n)_n$ Кошијев. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно.

$$\Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \|x^{(n)} - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) \|x_k^{(n)} - x_k\|_X < \frac{\varepsilon}{3}$$

Низ $x^{(n_0)}$ је Кошијев (јер је конвергентан) $\Rightarrow (\exists t_0 = t_0(n_0))(\forall m, k \geq t_0)$

$$\|x_m^{(n_0)} - x_k^{(n_0)}\|_X < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\|x_k - x_m\|_X = \|x_k - x_k^{(n_0)} + x_k^{(n_0)} - x_m^{(n_0)} + x_m^{(n_0)} - x_m\|_X$$

$$\leq \|x_k - x_k^{(n_0)}\|_X + \|x_k^{(n_0)} - x_m^{(n_0)}\|_X + \|x_m^{(n_0)} - x_m\|_X < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

за $k, m \geq t_0$ (t_0 зависи од n_0 , а n_0 зависи само од ε !)

ε произв.

$\Rightarrow (x_n)_n$ је Кошијев $\Rightarrow$ конвергира и $c(X)$ је затворен у Банаховом $C^\infty(X) \Rightarrow (c(X), \|\cdot\|_\infty)$ је Банахов. $\square$

X, Y - нормирани векторски простори:

$$A \in \mathcal{B}(X, Y) \Leftrightarrow A \in \mathcal{L}(X, Y) \text{ и } A \text{ је непрекидно}$$

непрекидно линеарно
прелинеарно
(оператори)

A је линеарно, тј. $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

За линеарно $A: X \rightarrow Y$, следеће је еквивалентно:

(1) A је непрекидно на X

(2) A је непрекидно у $x_0 \in X$

(3) A је Липшицово

(4) A је ограничено, тј. $(\exists C) \|Ax\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X$, за све $x \in X$

Докажимо: (1) $\Leftrightarrow$ (4), тј. линеарно пресликавање је непр. ако је ограничено (отуда ознака $B(X, Y)$)

$$(1) \Rightarrow (4): \|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| \leq C \cdot \|x-y\|, \text{ за } x, y \text{ произвољне}$$

$$\Rightarrow A \text{ је Липшицево} \Rightarrow A \text{ је непр.}$$

$$(4) \Rightarrow (1): A \text{ је непрекидно} \Rightarrow A \text{ је непрекидно у } 0 \Rightarrow (\exists \delta > 0) \|x\| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < 1$$

Нека је $x \neq 0$ произвољно:

$$y := \delta \cdot \frac{x}{\|x\|} \rightsquigarrow \|y\| = \delta \Rightarrow \|Ay\| < 1, \text{ а } Ay = \frac{\delta}{\|x\|} \cdot Ax$$

$$\Rightarrow \|Ay\| = \frac{\delta}{\|x\|} \cdot \|Ax\| < 1 \Rightarrow \|Ax\| < \frac{1}{\delta} \|x\|$$

* За X, Y нвп, $B(X, Y)$ је заиста векторски простор:

уведемо операције сабирања оператора и множења оператора скаларом

$$(A+B)(x) := A(x) + B(x)$$

$$(\alpha A)(x) := \alpha \cdot A(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Покажимо да је линеарна комбинација ограничених оператора такође ограничени оператор

(у смислу (1)): (Легко се види да је и линеаран: $(\alpha A + \beta B)(x+y) = \alpha A(x+y) + \beta B(x+y)$)

$$\begin{aligned} \|(\alpha A + \beta B)x\|_Y &= \|\alpha A(x) + \beta B(x)\|_Y \leq |\alpha| \|Ax\|_Y + |\beta| \|Bx\|_Y \\ &\leq |\alpha| \cdot C \cdot \|x\|_X + |\beta| \cdot C \cdot \|x\|_X \\ &\leq C \cdot (|\alpha| + |\beta|) \cdot \|x\|_X, \quad \forall x \in X \\ &\quad (\uparrow) \\ &\quad (\alpha, \beta \in B(X, Y)) \end{aligned}$$

* На простору $B(X, Y)$ дефинишемо операторску норму за $A \in B(X, Y)$ као инфимум свих C који задовољавају (1) и пишемо $\|A\|$. Приметимо да важи следеће:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

овде треба само видети да важи $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \|A\|$

или то важи јер је $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \stackrel{\|x\| \leq 1}{\Rightarrow} \|Ax\| \leq \|A\|$

$\|\cdot\|$ заиста има својства норме:

У складу са претходном дефиницијом, са десне стране једнакости * смо могли да пишемо и $|\alpha| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_X + |\beta| \cdot \|B\| \cdot \|x\|_X$, одакле бисмо директно добили да важи

$$\|\alpha A + \beta B\| \leq |\alpha| \cdot \|A\| + |\beta| \cdot \|B\|$$

$$1^\circ \alpha = \beta = 1 : \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$2^\circ \beta = 0 : \|\alpha A\| \leq |\alpha| \cdot \|A\| = |\alpha| \cdot \left\| \frac{1}{|\alpha|} \cdot \alpha A \right\| \leq |\alpha| \cdot \frac{1}{|\alpha|} \cdot \|\alpha A\| = \|\alpha A\|$$

$$\Rightarrow \|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\| \quad (\text{у претходном реду су све једнакости})$$

$$3^\circ \|A\| = 0 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \Rightarrow (\forall x \text{ т.д. } \|x\| \leq 1) \|Ax\| = 0 \Rightarrow Ax = 0 \quad \text{свакако је } \|A\| \geq 0 \text{ из дефиниције } \|A\|$$

$$\text{За произвољно } x \neq 0, \|Ax\| = \left\| \|x\| \cdot A \frac{x}{\|x\|} \right\| = \|x\| \cdot \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| = 0$$

$$\Rightarrow A \text{ је нул оператор}$$

1°, 2°, 3° $\Rightarrow (B(X, Y), \|\cdot\|)$ је нормирани векторски простор

СТАВ: X НВП, Y Банахов $\Rightarrow (B(X, Y), \|\cdot\|)$ је Банахов простор

ДОКАЗ: Показати да сваки апсолутно конвергентан ред у $B(X, Y)$ конвергира:

Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ АК ред у $B(X, Y)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\| = C < +\infty$.

Нека је $x \in X$ произвољно: $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\| \cdot \|x\| = C \cdot \|x\| < +\infty$ *

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n x$ је АК ред у $Y \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n x$ је конв. ред у Y

$\leadsto$ можемо дефинисати $A: X \rightarrow Y$ са $Ax := \sum_{n=1}^{\infty} A_n x$ (сума тачка по тачка)

(1) A је линеаран:

$$A(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k x + \beta \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k y = \alpha Ax + \beta Ay$$

(2) A је ограничен:

$$\|Ax\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n x \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n x\| \leq C \cdot \|x\|, \text{ за све } x \in X$$

$\Rightarrow A$ је ограничен и $\|A\| \leq C$

(1) и (2) $\Rightarrow A \in B(X, Y)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = A$ у $B(X, Y)$:

$$\begin{aligned} \|A - \sum_{k=1}^n A_k\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax - \sum_{k=1}^n A_k x\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k x \right\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A_k x\| \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A_k\| \cdot \|x\| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|A_k\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

НАПОМЕНА: Тврђење из претходног одељка се разликује од тврђења из примера (2) — норма није дефинисана на исти начин! ∇

③ Нека је X Банахов простор. Показати да је $c_0(X)$ такође Банахов простор (са нормом $\|\cdot\|_{\infty}$)

РЕШЕЊЕ: Јасно је да важи $c_0(X) \subset c(X)$, а у задатку ② смо видели да је $c(X)$ Банахов простор $\Rightarrow$ довољно је доказати да је $c_0(X)$ затворен потпростор од $c(X)$. Уочимо $A: c(X) \rightarrow X$, $A((x_n)_n) := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ — јасно је да је добро дефинисан и линеаран.

$$\|A((x_n)_n)\|_X = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right\|_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_X = \|(x_n)_n\|_{\infty}$$

$\Rightarrow A$ је ограничен и $A \in B(c(X), X)$ тј. A је непрекинут!

Приметимо да важи: $C_0(X) = A^{-1}(\{0\})$ (ЈЕДНО ОПЕРАТОРА A)
 $\uparrow$ $\uparrow$
 затворен инверзна слика затвореног при непрекидном
 A (ДАКЛЕ: ЈЕДНО ОПЕРАТОРА ЈЕ УВЕК
 затворен скуп)
 $+ A$ је непрекидан $\Rightarrow C_0(X)$ је затворен потпростор од $C(X)$
 $\Rightarrow C_0(X)$ је Банахов простор. ■

④ Нека је C_{00} простор свих низова комплексних бројева са коначно много ненула елемената. Доказати да $(C_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ није Банахов простор.

РЕШЕЊЕ: Посматрајмо низ $(x^{(n)})_n$ из C_{00} , задат на следећи начин:

$$x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$$

Низ $(x^{(n)})_n$ је Кошијев у C_{00} :

$$m > n: \|x^{(m)} - x^{(n)}\|_\infty = \|(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots, \frac{1}{m}, 0, \dots)\|_\infty = \frac{1}{n+1}$$

$\Rightarrow (x^{(n)})_n$ је Кошијев низ

Претпоставимо да $x^{(n)}$ конвергира ка неком $x \in C_{00}$

Тда $(\exists k_0 \in \mathbb{N})$ т.д. је $x_k = 0$ за $k \geq k_0$

Нека је $k \geq k_0$ фиксирано:

$$\text{за } n \geq k: |x_k^{(n)} - x_k| = \frac{1}{k}$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty$$

$$0$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{(n)} - x\|_\infty = 0$$

$$\Rightarrow (\forall k \in \mathbb{N}) \lim_{n \rightarrow \infty} |x_k^{(n)} - x_k| = 0$$

⑤ Нека је $\mathcal{P}$ векторски простор свих полинома над $\mathbb{C}$ и нека је за полином $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ дефинисано $\|p\| = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$. Доказати да је $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ нормиран простор који није Банахов.

РЕШЕЊЕ: Лако се види да је $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ заиста нормиран простор. Докажимо да није

Банахов: посматрајмо низ полинома $p_n(z) = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$m \geq n: \|p_n - p_m\| = \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2^k} \Rightarrow (p_n)_n \text{ је Кошијев низ у } (\mathcal{P}, \|\cdot\|)$$

Претпоставимо да низ $(p_n)_n$ конвергира, т.д. да $\exists p \in \mathcal{P}$ т.д. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p - p_n\| = 0$,

$$p = a_r z^r + \dots + a_1 z + a_0 \quad (\deg(p) = r).$$

Приметимо да за $n \geq r+1$ важи:

$$\|p - p_n\| = |1 - a_0| + |\frac{1}{2} - a_1| + \dots + |\frac{1}{2^r} - a_r| + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n+1}} > 0$$

не зависи од n !

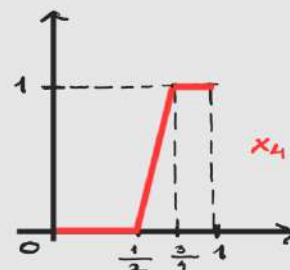
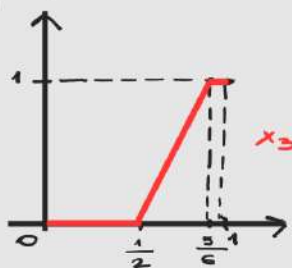
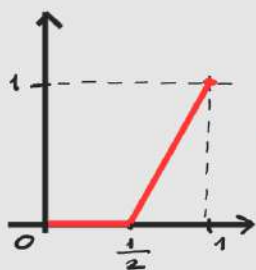
Пуштањем $\lim_{n \rightarrow \infty}$ у претходном реду видимо да $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p - p_n\|$ мора бити строго позитиван, што је директно контрадикција са тим да низ $(p_n)_n$ конвергира ка p .
 $(p_n)_n$ је Кошијев низ који не конвергира $\Rightarrow (P, \|\cdot\|)$ није Банахов простор. $\square$

6. Нека је $\|\cdot\|_1: C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са $\|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)| dt$, за $x \in C[0,1]$.
 (а) Доказати да је $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ нормирани простор који није Банахов и одредити његово комплетирање.

(б) Нека је $f: C[0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ дефинисано са $f(x) = x(\frac{1}{2})$, за $x \in C[0,1]$. Доказати да је f линеарни функционал на $C[0,1]$ који није ограничен.

РЕШЕЊЕ: (а) За свако $n \geq 2$ дефинишимо функције $x_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ на следећи начин:

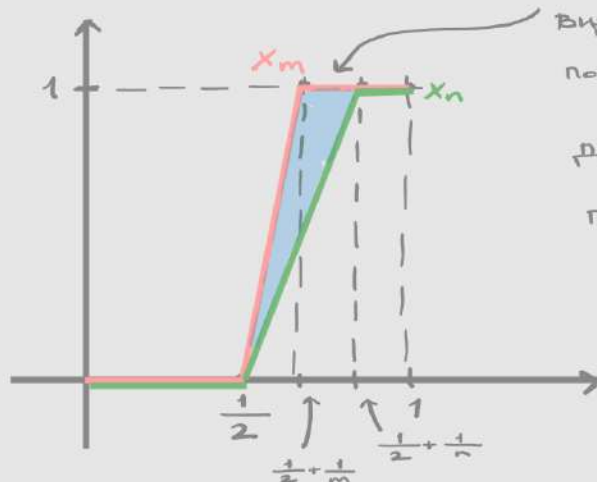
$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & , t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \\ \text{лин. до непрекидности} & , t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \end{cases}$$



све функције x_n су очигледно непрекидне и додатно, овај низ је Кошијев у $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$:

Нека је $m \geq n$:

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{m}$$



Видимо да је $\|x_n - x_m\|_1$ управо површина овог Δ , коју узимањем довољно великог n можемо учинити произвољно малом за све $m \geq n$.

Претпоставимо да $\exists x \in C[0,1]$ т.д. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_1 = 0$.

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|_1 &= \int_0^1 |x_n(t) - x(t)| dt = \int_0^{\frac{1}{2}} |x_n(t) - x(t)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} |x_n(t) - x(t)| dt + \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}^1 |x_n(t) - x(t)| dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} |x_n(t) - x(t)| dt + \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}^1 |1 - x(t)| dt \end{aligned}$$

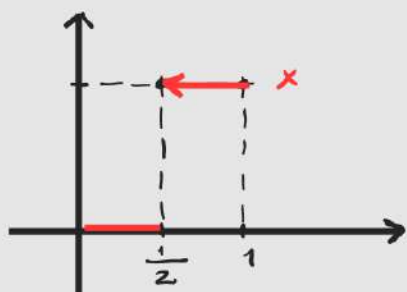
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_1 = 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)| dt = 0 \Rightarrow x \equiv 0 \text{ на } [0, \frac{1}{2}]$$

Слично, $\int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}^1 |1 - x(t)| dt$ не орада по n (интервал по ком интегралимо је све betu) + $\int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}^1 |1 - x(t)| dt \geq 0$ за све $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}^1 |1 - x(t)| dt = 0, \text{ за све } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow x(t) = 1 \text{ за } t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \text{ за све } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow x(t) = 1 \text{ за } t \in (\frac{1}{2}, 1]$$



$\leadsto x \notin C[0, 1]$ $\nwarrow$, тј. низ $(x_n)_n$ не конвергира у $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ и то није Банахов простор

знамо да јесте комплетан

Комплетирање простора $(C[0, 1], \|\cdot\|_1)$ је $(L^1[0, 1], \|\cdot\|_1)$

Комплетирање од X је $\bar{X}$ који је комплетан и за који важи $X \subseteq \bar{X}$, $\bar{X} = \bar{X}$; знамо из АЗЗ да су непрекидне функције густе у L^1 .
 $\uparrow$
 X густ у $\bar{X}$

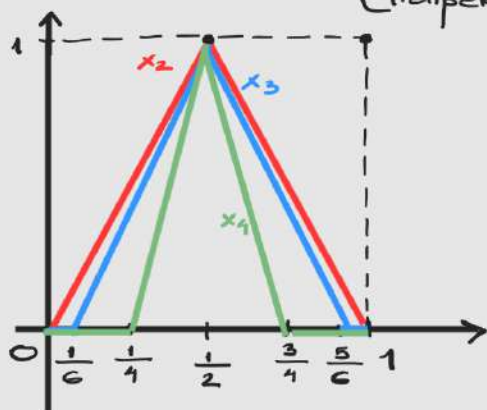
(б) f је очигледно линеаран функционал - докажимо да није ограничен:

у ту сврху, посматрајмо низ функција из $C[0, 1]$:

$$n \geq 2: x_n = \begin{cases} 0 & , t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \\ 1 & , t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

линт. до непрекидности

површина испод графика је очигледно < 1



$$(\forall n \geq 2) x_n \in C[0, 1] \text{ и } 0 < \|x_n\|_1 < 1$$

$$\Rightarrow \|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_1} \geq \frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|_1}, \text{ за } n \geq 2$$

$$\text{Поједно, } f(x_n) = 1 \text{ за све } n \geq 2, \text{ а}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_1 = 0 \text{ (очигледно је површина све мања)}$$

$$\Rightarrow \|f\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(x_n)|}{\|x_n\|_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\|x_n\|_1} = +\infty$$

$\Rightarrow f$ није ограничен

□

7. Испитати да ли dato пресликавање дефинише ограничени линеарни оператор и,

ако да, израчунати његову норму:

$$(a) A: C[0,1] \longrightarrow C[0,1], Ax(s) = \int_0^s x(t) dt$$

$$\|Ax\|_{\infty} = \max_{s \in [0,1]} |Ax(s)| = \max_{s \in [0,1]} \left| \int_0^s x(t) dt \right| \stackrel{\text{ош}}{\leq} \max_{s \in [0,1]} \int_0^s |x(t)| dt$$

$$\leq \max_{s \in [0,1]} \int_0^s \|x\|_{\infty} dt = \|x\|_{\infty}$$

+ A је линеаран из линеарности интеграла

$$\Rightarrow A \in \mathcal{B}(C[0,1], C[0,1]) \text{ и } \|A\| \leq 1$$

Нека је $x \equiv 1$ на $[0,1]$ - $\|x\|_{\infty} = 1$

$$\|Ax\|_{\infty} = \max_{s \in [0,1]} \left| \int_0^s 1 dt \right| = \max_{s \in [0,1]} |s| = 1 = \|x\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow \|A\| = 1 \text{ и норма се постиже у } x$$

$$(b) A: C[-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}, Ax = \int_{-1}^1 x(t) dt - x(0)$$

A је линеаран:

$$A(\alpha x + \beta y) = \int_{-1}^1 (\alpha x + \beta y)(t) dt - (\alpha x + \beta y)(0)$$

$$= \alpha \int_{-1}^1 x(t) dt - \alpha x(0) + \beta \int_{-1}^1 y(t) dt - \beta y(0)$$

$$= \alpha Ax + \beta Ay$$

$$|Ax| = \left| \int_{-1}^1 x(t) dt - x(0) \right| \leq \left| \int_{-1}^1 x(t) dt \right| + |x(0)|$$

$$\leq \int_{-1}^1 |x(t)| dt + \|x\|_{\infty}$$

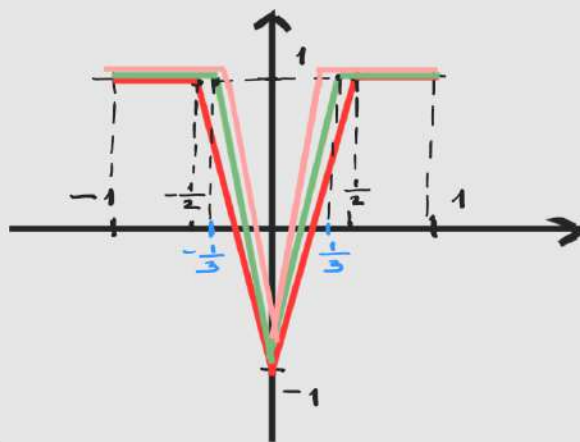
$$\leq 2\|x\|_{\infty} + \|x\|_{\infty} = 3\|x\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow A \in \mathcal{B}(C[-1,1], \mathbb{C}) \text{ и } \|A\| \leq 3$$

Желимо да израчунамо тачну норму оператора A :

Нека су $x_n \in C[-1,1]$, $n \geq 2$ функције дефинисане на следећи начин:

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & t=0 \\ 1, & t \in [-1, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, 1] \\ \text{линт. до} & , t \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ \text{непрерывности} \end{cases}$$



$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{\|x\|_\infty} \geq \frac{|Ax_n|}{\|x_n\|_\infty}, \text{ за } n \geq 2$$

$$\|x_n\|_\infty = \max_{t \in [-1, 1]} |x_n(t)| = 1, \text{ за все } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} |Ax_n| &= \left| \int_{-1}^1 x_n(t) dt - x_n(0) \right| = \left| \int_{-1}^1 x_n(t) dt + 1 \right| \\ \int_{-1}^1 x_n(t) dt &= \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} dt + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x_n(t) dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 dt = -\frac{1}{n} + 1 + 1 - \frac{1}{n} + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x_n(t) dt \\ &= 2 - \frac{2}{n} + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x_n(t) dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |Ax_n| = \left| 3 - \frac{2}{n} + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x_n(t) dt \right| \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |Ax_n| = 3$$

$$\|A\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|Ax_n|}{\|x_n\|_\infty} = 3 \quad \Rightarrow \|A\| = 3.$$

Важно и выше: $\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x_n(t) dt = 0$, за все $n \geq 2$

$$(B) A: C[0, 1] \longrightarrow C[0, 1], \quad Ax(t) = t^2 x(0)$$

A је линеаран и

Да ли је A ограничен?

$$\|Ax\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |Ax(t)| = \sup_{t \in [0, 1]} t^2 \cdot |x(0)| \leq |x(0)| \leq \|x\|_\infty$$

$$\Rightarrow A \in \mathcal{B}(C[0, 1], C[0, 1]), \quad \|A\| \leq 1$$

A такође поставља форму на $x(t) \equiv 1, t \in [0, 1]$

$$\Rightarrow \|A\| = 1$$

$$(r) A_r: C[0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad A_r(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n f(r^n), \quad r \in (0, 1)$$

Да ли је A_r добро дефинисан?

$$|(-1)^n r^n f(r^n)| \leq r^n \cdot \|f\|_\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} r^n < +\infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n f(r^n) < +\infty, \text{ за все } f \in C[0, 1]$$

↑
диск. конт. + $\mathbb{C}$ Банахов

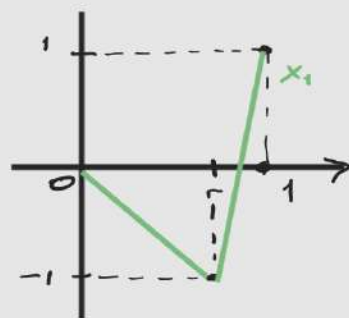
$$|A_r(f)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^n f(r^n) \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^n |f(r^n)| \leq \|f\|_\infty \cdot \frac{1}{1-r}$$

+ A_r је линеаран

$$\Rightarrow A_r \in \mathcal{B}(C[0, 1], \mathbb{C}), \quad \|A_r\| \leq \frac{1}{1-r}$$

Посматрајмо низ функција $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ из $C[0,1]$ дефинисан на сл. начин:

$$x_k(t) = \begin{cases} (-1)^n, & t = r^n, n \in \{0, \dots, k\} \\ 0, & t = 0 \\ \text{лин. до неспр. , иначе} \\ \text{измешу} \end{cases}$$



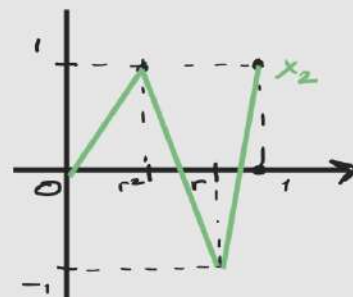
Приметимо: $\|x_k\|_\infty = 1$, за све $k \in \mathbb{N}$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \frac{|Ax|}{\|x\|_\infty} \geq \frac{|Ax_k|}{\|x_k\|_\infty} = |Ax_k|$$

$$\Rightarrow \|A\| \geq \lim_{k \rightarrow \infty} |Ax_k|$$

$$|Ax_k| = \left| \sum_{n=0}^k (-1)^n r^n x_k(r^n) + \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^n r^n x_k(r^n) \right|$$

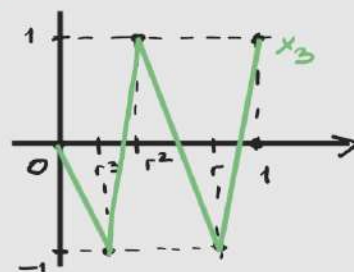
$$= \left| \sum_{n=0}^k r^n + \sum_{n=k+1}^{\infty} (-1)^n r^n x_k(r^n) \right| / \lim_{k \rightarrow \infty}$$



$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} Ax_k = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

$$\Rightarrow \|A\| \geq \frac{1}{1-r}$$

$$\Rightarrow \|A\| = \frac{1}{1-r}$$



д) $A: \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathbb{C}$, $A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}) \cdot x_n$, за $x = (x_n)_n \in \mathcal{C}^1$

Да ли је A добро деф?

$$|1 - \frac{1}{n}| \leq 1, \text{ за } n \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |(1 - \frac{1}{n}) x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty \quad ((x_n)_n \in \mathcal{C}^1)$$

+ сваки апсолутно конвергентан ред у $\mathbb{C}$ конвергира

Дакле, A је очигледно линеарн.

$$|A(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n}) x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |1 - \frac{1}{n}| |x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1 < +\infty$$

$$\Rightarrow A \in \mathcal{B}(\mathcal{C}^1, \mathbb{C}), \|A\| \leq 1$$

Посматрајмо низ $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ елемената из $\mathcal{C}^1$, $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$

Приметимо: $(\forall n \in \mathbb{N}) \|e_n\|_1 = 1$

$$\leadsto \|A\| = \sup_{\|x\|_1=1} |A(x)| \geq |A(e_n)|, \forall n \Rightarrow \|A\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} |A(e_n)|$$

$$A(e_n) = 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |A(e_n)| = 1$$

$$\|A\| \geq 1$$

$$\Rightarrow \|A\| = 1$$

□