Писмени испит из Диференцијалних једначина Б (В), 30.6.2018.

1. Нека $a \in \mathbb{R}$ и нека је $B = \begin{bmatrix} -a+1 & 0 \\ -a^2+6a-8 & a-6 \end{bmatrix}$.

а) Ако $a \in \mathbb{N}$ и a је паран број, за које вредности параметра a постоји реална матрица A за коју је $B = e^A$.

б) Нека је $\tilde{a}$ вредност за коју $\det B$ има максималну вредност. За $a = \tilde{a} - \frac{1}{2}$ решити систем диференцијалних једначина $Y' = BY$.

2. Решити систем диференцијалних једначина

$$xy' = y - z$$
$$xyz' = -z^2\,.$$

3. Нека је $f \in C[0,1]$. Нека је дат гранични проблем $(1+x^2)y'' + 2xy' = f(x)\,, y(0) = 0,\ y(1) = \pi y'(1)$.

а) Одредити Гринову функцију за дати гранични проблем.

б) Ако је $|f(x)| \leqslant 1$ за свако $x \in [0,1]$ и ако је $y(x)$ решење датог граничног проблема, доказати да за свако $x \in [0,1]$ важи

$$y(x) \leqslant 2\left(1 - \frac{\ln 2}{\pi}\right)x\,.$$

4. Нека је дата парцијална диференцијална једначина

$$x(2y^4 - z^4)\frac{\partial z}{\partial x} + y(z^4 - 2x^4)\frac{\partial z}{\partial y} = z(x^4 - y^4)\,.$$

а) Решити једначину.

б) Одредити решење које задовољава услове $z = 1$, $(x^2-y^2)^2 + x^2y^2 = -1$.

Писмени испит из Диференцијалних једначина Б (В), 30.6.2018.

1. Нека $a \in \mathbb{R}$ и нека је $B = \begin{bmatrix} -a+1 & 0 \\ -a^2+6a-8 & a-6 \end{bmatrix}$.

а) Ако $a \in \mathbb{N}$ и a је паран број, за које вредности параметра a постоји реална матрица A за коју је $B = e^A$.

б) Нека је $\tilde{a}$ вредност за коју $\det B$ има максималну вредност. За $a = \tilde{a} - \frac{1}{2}$ решити систем диференцијалних једначина $Y' = BY$.

2. Решити систем диференцијалних једначина

$$xy' = y - z$$
$$xyz' = -z^2\,.$$

3. Нека је $f \in C[0,1]$. Нека је дат гранични проблем $(1+x^2)y'' + 2xy' = f(x)\,, y(0) = 0,\ y(1) = \pi y'(1)$.

а) Одредити Гринову функцију за дати гранични проблем.

б) Ако је $|f(x)| \leqslant 1$ за свако $x \in [0,1]$ и ако је $y(x)$ решење датог граничног проблема, доказати да за свако $x \in [0,1]$ важи

$$y(x) \leqslant 2\left(1 - \frac{\ln 2}{\pi}\right)x\,.$$

4. Нека је дата парцијална диференцијална једначина

$$x(2y^4 - z^4)\frac{\partial z}{\partial x} + y(z^4 - 2x^4)\frac{\partial z}{\partial y} = z(x^4 - y^4)\,.$$

а) Решити једначину.

б) Одредити решење које задовољава услове $z = 1$, $(x^2-y^2)^2 + x^2y^2 = -1$.