

Писмени испит из Диференцијалних једначина Б (В), 13.6.2018.

1. Дата је диференцијална једначина $x^2y'' + 7xy' + 9y = 0$.

а) Методом решавања диференцијалних једначина помоћу степених редова одредити опште решење дате диференцијалне једначине у коначном облику (сумирати редове).

б) Одредити решење $y_1(x)$ дате диференцијалне једначине чија је тангента у тачки $(1, 1)$ права $y = 1$.

в) Доказати да за свако $x > 0$ важи да је $y_1(x) \leq \frac{3x-2}{x^3}$. Када се у претходној неједнакости достиже једнакост?

2. Нека је дат систем диференцијалних једначина

$$x^2yy' = \frac{y^2}{2} + e^{2z}$$

$$2x^2z' = -3\frac{y^2}{e^{2z}} - 4.$$

а) Свести дати систем на систем облика $Y' = AY$, где је $A \in M_2(\mathbb{R})$.

б) Израчунати $\det \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(E + \frac{A}{m} \right)^m \right)$.

в) Решити систем $Y' = AY$.

3. Нека су $a, b \in \mathbb{R}^+$ и нека је $a \neq b$. Нека је дата диференцијална једначина $y'' + 2ay' + b^2y = 0$.

а) Свести диференцијалну једначину на систем диференцијалних једначина.

б) Решити добијени систем диференцијалних једначина.

в) Скицирати фазни портрет система диференцијалних једначина. Како се назива одговарајући фазни портрет?

г) Одредити еквилибријум система и испитати његову стабилност.

4. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$z(x\sqrt{x^2+y^2+1} - y(x^2+y^2))\frac{\partial u}{\partial x} + (y\sqrt{x^2+y^2+1} + x(x^2+y^2))z\frac{\partial u}{\partial y} + (2xy\sqrt{x^2+y^2+1} + x^4 - y^4)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Писмени испит из Диференцијалних једначина Б (В), 13.6.2018.

1. Дата је диференцијална једначина $x^2y'' + 7xy' + 9y = 0$.

а) Методом решавања диференцијалних једначина помоћу степених редова одредити опште решење дате диференцијалне једначине у коначном облику (сумирати редове).

б) Одредити решење $y_1(x)$ дате диференцијалне једначине чија је тангента у тачки $(1, 1)$ права $y = 1$.

в) Доказати да за свако $x > 0$ важи да је $y_1(x) \leq \frac{3x-2}{x^3}$. Када се у претходној неједнакости достиже једнакост?

2. Нека је дат систем диференцијалних једначина

$$x^2yy' = \frac{y^2}{2} + e^{2z}$$

$$2x^2z' = -3\frac{y^2}{e^{2z}} - 4.$$

а) Свести дати систем на систем облика $Y' = AY$, где је $A \in M_2(\mathbb{R})$.

б) Израчунати $\det \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(E + \frac{A}{m} \right)^m \right)$.

в) Решити систем $Y' = AY$.

3. Нека су $a, b \in \mathbb{R}^+$ и нека је $a \neq b$. Нека је дата диференцијална једначина $y'' + 2ay' + b^2y = 0$.

а) Свести диференцијалну једначину на систем диференцијалних једначина.

б) Решити добијени систем диференцијалних једначина.

в) Скицирати фазни портрет система диференцијалних једначина. Како се назива одговарајући фазни портрет?

г) Одредити еквилибријум система и испитати његову стабилност.

4. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$z(x\sqrt{x^2+y^2+1} - y(x^2+y^2))\frac{\partial u}{\partial x} + (y\sqrt{x^2+y^2+1} + x(x^2+y^2))z\frac{\partial u}{\partial y} + (2xy\sqrt{x^2+y^2+1} + x^4 - y^4)\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$