

Писмени испит из Диференцијалних једначина Б, 1.7.2019

1. Дати су системи Б: а) $\begin{cases} x'_1 = -8x_1 - x_1x_2^2 - 3x_2^3 \\ x'_2 = 2x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x'_1 = x_2 - x_1 - x_1^2 \\ x'_2 = 3x_1 - x_2 - x_1^2 \end{cases}$, в) $\begin{cases} x'_1 = 3x_1 - 5x_2 \\ x'_2 = 2x_1 - 3x_2 \end{cases}$.

Доказати одговарајуће тврђење за $X_* = (0, 0)$:

- 1) X_* је нестабилан, 2) X_* је стабилан, али није асимптотски стабилан, 3) X_* је асимптотски стабилан.

2. Нека је $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -2019 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A \in M_{2019}(\mathbb{R})$ и $B = e^A$.

а) Ако је $B = [b_{i,j}]_{i,j=1}^n$ доказати да је $b_{ij} \geq 0$, $\forall j \neq n$.

б) Доказати да су све сопствене вредности матрице B позитивне.

3. Решити диференцијалну једначину $y'' \sin x + 2(\cos x + \sin x)y' + (\cos x - 4 \sin x)y = 0$, потом наћи функцију Грина за гранични задатак $y(0) = 0$, $y(1) \cos 1 + y'(1) \sin 1 = 2$.

4. Решити парцијалну диференцијалну једначину $yu'_x - xu'_y = 0$, потом израчунати запремину тела које је ограничено графицима решења чији су почетни услови $u_1(0, y) = |y|$ и $u_2(0, y) = 1 + \sqrt{1 - y^2}$.

Писмени испит из Диференцијалних једначина Б, 1.7.2019

1. Дати су системи Б: а) $\begin{cases} x'_1 = -8x_1 - x_1x_2^2 - 3x_2^3 \\ x'_2 = 2x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x'_1 = x_2 - x_1 - x_1^2 \\ x'_2 = 3x_1 - x_2 - x_1^2 \end{cases}$, в) $\begin{cases} x'_1 = 3x_1 - 5x_2 \\ x'_2 = 2x_1 - 3x_2 \end{cases}$.

Доказати одговарајуће тврђење за $X_* = (0, 0)$:

- 1) X_* је нестабилан, 2) X_* је стабилан, али није асимптотски стабилан, 3) X_* је асимптотски стабилан.

2. Нека је $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -2019 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A \in M_{2019}(\mathbb{R})$ и $B = e^A$.

а) Ако је $B = [b_{i,j}]_{i,j=1}^n$ доказати да је $b_{ij} \geq 0$, $\forall j \neq n$.

б) Доказати да су све сопствене вредности матрице B позитивне.

3. Решити диференцијалну једначину $y'' \sin x + 2(\cos x + \sin x)y' + (\cos x - 4 \sin x)y = 0$, потом наћи функцију Грина за гранични задатак $y(0) = 0$, $y(1) \cos 1 + y'(1) \sin 1 = 2$.

4. Решити парцијалну диференцијалну једначину $yu'_x - xu'_y = 0$, потом израчунати запремину тела које је ограничено графицима решења чији су почетни услови $u_1(0, y) = |y|$ и $u_2(0, y) = 1 + \sqrt{1 - y^2}$.