

ТОПОЛОГИЈА Б

План предавања, 2024/25. школска година

План предавања је направљен према уџбенику „Топологија” (аутора М. Марјановића и С. Врећице) и додатној литератури. Подељен је у целине у складу са двочасима који се по наставном плану одржавају једном недељно. За прво предавање и на још неким местима је дат допунски материјал, ради једноставнијег излагања, другог приступа или детаљнијих објашњења.

- **1. двочас:**

Подсетити се количничких пресликавања и количничких простора (Топологија А). Теорема о потпростору који сече све класе и пример реалног пројективног простора $\mathbb{RP}^n$. Тополошке конструкције простора: дисјунктна унија, букет, лепљење пресликавањем, цилиндар и конус пресликавања. Литература је „Додатни материјал 1”.

Хомотопија - почетак: дефиниција, релација еквиваленције, слагање са композицијом (страна 187 (уводна прича), а затим стране 190 и део 191, од дефиниције 2.1 закључно са ставом 2.2.)

- **2. двочас:** Хомотопија - наставак у уџбенику од Дефиниције 2.3 на страни 191, закључно са страном 195.

Хомотопски еквивалентни простори $X \simeq Y$; $\simeq$ је релација еквиваленције на скупу тополошких простора. Примери: (a) питање када су константна пресликавања међусобно хомотопна; (b) хомотопија пресликавања којима је кодомен конвексан скуп (додатак: ова хомотопија се назива „линијска хомотопија”); (c), (d), (e)- корисни примери који се често раде на вежбама.

Дефиниција хомотопије пресликавања парова и дефиниција релативне хомотопије $f \simeq g \text{ (rel } A)$.

Ретракција, деформациона ретракција и јака деформациона ретракција. Тврђење 2.4. Интуиција и примери. Посебно, овде су значајни примери које ћете радити на вежбама.

Контрактибилан простор. Додатак: у књизи није дата ознака, а ми ћемо за контрактибилан простор X писати $X \simeq *$. Особине; тврђење 2.5.

Пример 2.6: тополошки чешаљ. Тврђење 2.7: цилиндар M_f пресликавања $f : X \rightarrow Y$ је хомотопски еквивалентан кодомену Y . Тврђење 2.8: путна повезаност је хомотопска инваријанта. За вежбу показати да је повезаност хомотопска инваријанта. Тврђење 2.9 - потребно је само знати формулацију, и разумети главну идеју у доказу, без техничких детаља.

- **3. двочас:**

Својство проширења хомотопије - почиње на страни 197 у уџбенику након доказа теореме 2.9; теорема 2.10; теорема 2.11 на страни 198 (напомена: у теорему додати услов да је X Хауздорфов простор, ради оправдања непрекидности пресликавања $F \cup f_0$).

Поглавље „3. Неесенцијална пресликавања” (страна 200 и врх стране 201).

Напомена 1: неесенцијално пресликавање f називамо још и *хомотопски тривијално* пресликавање и користимо ознаку $f \simeq \text{const}$.

Напомена 2: У доказу тврђења 3.2 користи се теорема да сфера S^n није ретракт диска D^{n+1} . Ову теорему ћемо касније доказати у оквиру приче о Брауеровој теорему.

„Додатни материјал 2” - додатна тврђења.

- **4. двочас:**

Фундаментална група - од стране 207. у уџбенику закључно са првим пасусом на страни 211.

Дефиниција петљи, еквиваленције међу њима, надовезивања. Напомена: користи се производ петљи као познат, а уколико неком није, у другом пасусу на страни 188 може се наћи прецизно дефинисан општији производ, тј. производ путева који се могу надовезати.

Скуп класа $\pi_1(X, x_0)$, дефиниција операције на класама, добра дефинисаност. Кроз тврђења 5.0.1 – 5.0.4 се показује да је $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ група која се назива *фундаментална група простора X са базном тачком x_0* .

Фукторијалност: непрекидно пресликавање f индукује хомоморфизам f^* . Тврђење 5.2 - фундаментална група је хомотопска инваријанта пара (X, x_0) .

Након тога, на страни 210 и на врху стране 211 изведена је важна дискусија о уопштењу претходних разматрања на низ путева $u_1, \dots, u_n$, која нам даје више слободе у наставку.

- **5. двочас:**

Фундаментална група – наставак. Почињемо са тврђењем 5.3 на страни 211 и са дефиницијом $\pi_1(X)$ за путно-повезани простор X . Настављамо са „Додатним материјалом 3” који даје још једно својство пресликавања $u_\#$ и последицу коју ћемо користити у наставку курса. Затим прелазимо на важну теорему 5.4 о хомотопској инваријантности фундаменталне групе.

Поглавље 6 - изоморфизам $\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$. Дефиниција просто повезаних простора.

Наткривања: глава X , поглавље 1 (*Наткривајући простори*), које се састоји од дефиниције и примера (од стране 255 до средине стране 257 у уџбенику).

- **6. двочас:**

Наткривања: глава X , поглавље 2 (*Подизање путања и пресликавања*), од средине стране 257 закључно са Последицом 2.4 на страни 259. Теорема 2.2 (о подизању хомотопије) може захтевати нешто више времена за разумевање и геометријску визуализацију. Доказ последице 2.3 се очекује за домаћи као мали задатак примене претходног.

- **7. двочас:**

Наткривања: глава X , поглавље 2, почев од Теореме 2.5 (стр. 259) све до Теореме 2.10 (укључујући и њу). За све просторе у тврђењима претпостављамо да су локално путно повезани.

Затим прелазимо на одређивање фундаменталне групе кружнице, тј. показујемо да важи $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Литература је почетак поглавља 3 закључно са тврђењем 3.2 (на страни 263).

- **8. двочас:**

Еквивалентна дефиниција фундаменталне групе - „Додатни материјал 4”

Примене фундаменталне групе кружнице: основна теорема алгебре (теорема 3.3, на странама 263-264) и (алгебарски) доказ Брауерове теореме за $n = 2$ (теорема 3.4, на страни 264).

Борсук-Уламова теорема: „Додатни материјал 5”

Теорема о сендвичу у $\mathbb{R}^3$ (теорема 3.9, стр.266), затим размишљања која почињу након те теореме и прича о степену, закључно са ставом 3.10 и запажањима након њега на страни 267.

- **9. двочас:**

Ван Кампенова теорема (глава X - поглавље 5, од стране 271 закључно са страном 274). Овде је корисна слободнија интерпретација примене дата на вежбама.

- **Преостала три двочаса (у ванредним условима):**

Глава VI - симплицијални комплекси. Прва четири поглавља ове главе детаљно објашњавају симплицијалне комплексе и њихове особине, док пето и шесто поглавље садрже доказе важних теорема. Стога се очекује познавање прва четири поглавља, али је фокус на петом и шестом поглављу (и на тврђењима на које се позивају теореме у њима). Испитна питања ће се фокусирати на Шпернерову лему, КKM лему, својство фиксне тачке и Брауерову теорему.