

- Додатни материјал 2 -

Пресликавања хомотопна константним

$\varphi_1, \varphi_2: X \rightarrow Y$ константна пресликавања

$$\varphi_i(x) = y_i, \quad \forall x \in X$$

$$i=1,2$$

За венту показати: $\varphi_1 \simeq \varphi_2 \Leftrightarrow \exists$ пути који спаја y_1 и y_2

Класе пресликавања у односу на релацију $\simeq$ означавамо са $[]$

($\simeq$ је релација еквивалентности на простору свих пресликавања $f: X \rightarrow Y$)

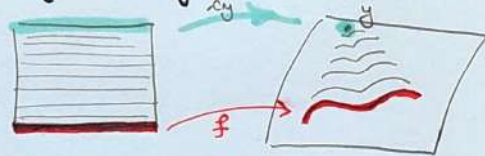
Дакле, важи: $[\varphi_1] = [\varphi_2] \Leftrightarrow \exists$ пути који спаја y_1 и y_2 .

$\Rightarrow$ Ако је Y путно повезан сва константна пресликавања су међусобно хомотопна, тј. припадају класи $[const]$

Нека је простор Y путно повезан.

$f: X \rightarrow Y$ је хомотопски тривијално (контра, несензијално) ако $f \simeq const$

Дакле, шире постоји хомотопија $H: X \times I \rightarrow Y$ $H(x,0) = f(x)$ $H(x,1) = y$ за неко $y \in Y$



некако мичи на конус "



пуз идеју нешто истражује
средње штрбење, само нам
је претихоу по штрбење
ојам проширења пресликавања

ПЕФ. Нека је $A \subset X$ и $f: A \rightarrow Y$ непрекидно.

Непрекидно пресликавање $F: X \rightarrow Y$ је ПРОШИРЕЊЕ ПРЕСЛИКАВАЊА f

ако важи: $F|_A = f$ тј. $F \circ i = f$, где је $i: A \hookrightarrow X$ имбидија



X се природно уграђа у свј конус CX на "доњи ниво"

$$i: X \hookrightarrow CX \quad i(x) = [x, 0]$$



$$конус: CX = X \times I / \{(x_1, 1) \sim (x_2, 1) \mid \forall x_1, x_2 \in X\}$$

Сада имемо важно штрбење:

Штрбење

$f: X \rightarrow Y$ непрекидно Тада важи:

$f \simeq const \Leftrightarrow f$ се може проширити на CX .

Доказ: ($\Rightarrow$) Нека је $H: X \times I \rightarrow Y$ хомотопија између f и константног φ_{y_0} ($y_0 \in Y$)

$$H(x,0) = f(x)$$

$$H(x,1) = y_0$$

$$\text{Дефинишимо } F: CX \rightarrow Y \quad F([x,t]) := H(x,t)$$

- F je dobro deficitisan jer:

$$[x_1, t_1] = [x_2, t_2] \Leftrightarrow (x_1, t_1) = (x_2, t_2) \vee \begin{matrix} t_1 = t_2 = 1 \\ \uparrow \\ \text{image} \end{matrix} \quad \begin{matrix} H(x_1, 1) = y_0 = H(x_2, 1) \\ \downarrow \end{matrix}$$

- F je nepravilno jer konjugira:

а: $X \times I \xrightarrow{H} Y$
 $\pi \searrow \quad \swarrow \begin{matrix} G \\ F \end{matrix}$
 CX
 где π — проекция

$F \circ \pi = H$
 π — коммутативна
 H — непрерывна $\} \Rightarrow F$ непрерывна

- $F[x_0] = H(x_0) = f(x) \Rightarrow F \circ i = f$
 F je zaimka prirovnave.

($\Leftarrow$) Нека је $F: X \rightarrow Y$ непрекинуто њанто је $F([x_1, x_2]) = [f(x_1), f(x_2)]$

формула: $\bar{y} := F[x_1]$

Дедукцию $H: X \times I \rightarrow Y$

$H(x,t) := F[x,t]$ - good for sub, independent ✓

Важно: $\begin{cases} H(x,0) = f(x) \\ H(x,1) = \bar{y} \end{cases} \Rightarrow H: \mathcal{F} \approx \mathcal{C}\mathcal{F} \text{ ил. } f \approx \text{const.}$ 

У књизи је дао сингланан списак док ширине за $X=S^n$ ($CX=OS^n \approx D^{n+1}$)
(тб. 3.2. стр 200)

$$f: S^n \rightarrow Y \text{ непрерывно}$$

Тогда: $f \approx \text{const} \Leftrightarrow f$ се може проширити на D^{n+1} .

можемо показати још једну вањну нашу шпору:

Твърдение $X \cong * \Leftrightarrow 1_X$ се може проширият на сч

Доказ: $\chi \simeq * \Leftrightarrow 1_\chi \simeq \text{const} \Leftrightarrow 1_\chi$ се може проширити на S_X .