

Количнички простори & тополошке конструкције

Из топологије А знамо:

- Шта је количничко пресликавање? = квоцијентно пресликавање
 $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$ је количничко ако је f π_A и важи:
 $(\forall V \subset Y) V \in \tau_Y \Leftrightarrow f^{-1}(V) \in \tau_X$
- Особине:
 - * f количничко $\Rightarrow f$ непрекидно
 - * f непр., π_A , зашворено $\Rightarrow f$ количничко
 - * $X \xrightarrow{g \circ f} Z$ ако је f количничко, онда важи еквиваленција:
 $\begin{matrix} X & \xrightarrow{g \circ f} & Z \\ \downarrow f & \nearrow g & \\ Y & & \end{matrix}$
 g непрекидно $\Leftrightarrow g \circ f$ непрекидно.

- Шта је количничка топологија?

$$\begin{matrix} (X, \tau_X) & \xrightarrow{f} & Y \\ \text{топ. пр.} & & \text{скуп} \end{matrix}$$

Количничка топологија на скупу Y је: $\tau_Y = \{V \subset Y \mid f^{-1}(V) \in \tau_X\}$

(Y, τ_Y) се назива количнички (квоцијентни) простор
 и пресликавање f је количничко као $f: (X, \tau_X) \rightarrow (Y, \tau_Y)$

- Неки важни количнички простори:

(I) X -т.п. $\sim$ - рел. еквиваленције на X

$X/\sim$ - скуп класа

$\pi: X \rightarrow X/\sim$ природна пројекција $x \mapsto [x]$

помоћу пресликавања π задајемо топологију (количничку) на $X/\sim$:

$$\tau_{X/\sim} := \{V \subset X/\sim \mid \pi^{-1}(V) \in \tau_X\}$$

$\rightsquigarrow$ простор многолики $(X/\sim, \tau_{X/\sim})$

(II) $f: X \rightarrow Y$ функција X -т.п.

$X/f := X/\sim$, где је релација $\sim$ на X задава са: $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$

имамо слив: $f: X \rightarrow Y$ количничко $\Rightarrow X/f \approx Y$

(III) $A \subset X$

задајемо релацију на X : $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_1, x_2 \in A$

простор класа $X/\sim$ означавамо са X/A - колапсирани (скуполике)
 A у тачку

Сада ћемо ићи о количиним апроксимацијама графички теорема и примером које ћемо ићи да урадимо у топологији A :

X -топ. пр. $\sim$ -рел еквиваленције на $X \rightarrow$ апрокс. класа $X/\sim$

формално: $\sim \subset X \times X$

уочимо неки апроксиматор $A \subset X$

наслеђена релација: $\sim_A := \sim \cap (A \times A)$

до је релација еквиваленције на $A \rightarrow$ апрокс. класа $A/\sim_A$

Теорема

X -топ. пр., $\sim$ -рел еквив. на X

$X/\sim$ Хауздорфов (T_2) апрокс.

Нека је $A \subset X$ компактан ($A \in \mathcal{K}_X$) подскуп који сече све класе

(у. $(\forall x \in X) [x] \cap A \neq \emptyset$)

Тада важи: $X/\sim \approx A/\sim_A$

Доказ: $A \xleftarrow{i} X \xrightarrow{\pi} X/\sim$
 $\uparrow$ инклузија $\uparrow$ апрокс. пројекција

Знамо да:

- $\pi \circ i$ је непрекидно
- $\pi \circ i$ је нт јер A сече све класе

- A је компактан $X/\sim T_2$ $\} \Rightarrow \pi \circ i$ је затворено

$\Rightarrow \pi \circ i$ је количничко

$\pi \circ i$ количничко, па из познатог следи (видети став у II прет. стране)

$$X/\sim \approx \underbrace{A/\pi \circ i}_{\sim_A}$$

ово је тачно $A/\sim_A$ јер: $a_1, a_2 \in A$

$$\pi \circ i(a_1) = \pi \circ i(a_2) \Leftrightarrow \pi(a_1) = \pi(a_2) \Leftrightarrow [a_1] = [a_2] \Leftrightarrow a_1 \sim_A a_2$$

$$\text{Заме } X/\sim \approx A/\sim_A \quad \square$$

Зашто је ова теорема корисна?

За сличајуће када имамо много представника исте класе, смањивањем $\uparrow$ подскупа (који сече све класе) одговара се биривости у неким сличајућима

По чему биривост уз следећи примера RP^4 .

Пример

$\mathbb{RP}^n$

На простору $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ дефинишемо релацију $\sim$:

$$x \sim y \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R}) y = \lambda x$$

то је релација еквиваленције.

дефинишемо: $\mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) / \sim$

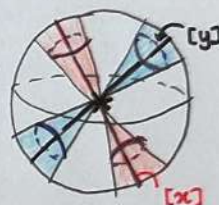
РЕАЛНИ
ПРОЈЕКТИВНИ
ПРОСТОР
ДИМЕНЗИЈЕ n

Шта су класе при $\sim$? Праке кроз координатни без нота.

Постављајмо $A = S^n \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ - сфера је компактни који саче све класе

$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} / \sim$ је T_2 - доказ се може наћи у оквиру 5.3. на странама 129-130 уџбеника.

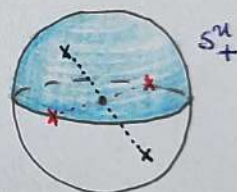
теор.
идеја: где праве без 0
се могу охвоћати
"дугим линијама"



Према теорему:

$$\mathbb{RP}^n \cong S^n / \sim_{S^n} = S^n / x \sim -x$$

наследна
релација на S^n
идентификује
антиподне
тачке

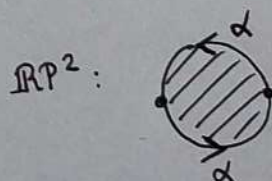


можемо уочити још једну компактни који саче све класе - то је
горна полусфера (затворена) S^n_+ ; наследна релација идентификује
само антиподне тачке на рубу:

$$S^n / x \sim -x \cong S^n_+ / \begin{matrix} x \sim -x \\ x \in \partial S^n_+ \end{matrix} \cong \begin{matrix} D^n \\ \uparrow \\ \text{хомеоморфизам} \\ \text{са } S^n \end{matrix} / \begin{matrix} x \sim -x \\ x \in \partial D^n \end{matrix}$$

- тамо добијемо
још једну
репрезентацију

• За $n=2$: $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim \cong S^2 / x \sim -x \cong D^2 / \begin{matrix} x \sim -x \\ x \in \partial D^2 = S^1 \end{matrix}$



(За оне који желе детаљније - поглавје 5. главе V у уџбенику, стране 128-131.)

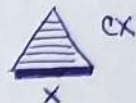
Конструкције простора

Сада ћемо навести неколико важних конструиција које се често срећу у топологији.

(X,T)-простор

• КОНУС ПРОСТОРА X : $CX := (X \times [0,1]) / X \times \{1\}$

↑
конични простор цилиндра $X \times [0,1]$
који се добија идентификујући "нивоа" $X \times \{1\}$ у тачку.
(4) на стр. 142 у уџбенику)

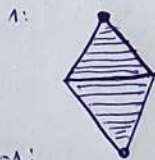


имамо природно утисање $X \hookrightarrow CX$ на било ком нивоу за $t < 1$:

$$x \mapsto [x, t]$$

$t \in [0,1)$ фиксирано

• СУСПЕНЗИЈА ПРОСТОРА X : $SX := (X \times [-1,1]) / \begin{matrix} (x,1) \sim (x',1) \\ (x,-1) \sim (x',-1) \\ \forall x, x' \in X \end{matrix}$



-1:

(нивоа $t=1$ и $t=-1$ су идентификујемо у тачку)

← посматрамо минималну
реализацију еквивалентности
која задовољава све услове
(11) на стр. 144. уџбеника)

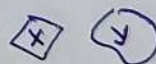
На вентилима (у топА/топБ) се показују особине које треба знати:

$$\begin{aligned} CS^n &\approx D^n \\ SS^n &\approx S^{n+1} \end{aligned}$$

$(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ - два тополошка простора

• ДИСЈУНКТНА УНИЈА: $(X \sqcup Y, \tau_{X \sqcup Y})$

сушти на које дефинишемо топологију је дисјунктивна унија простора X и Y
топологија $\tau_{X \sqcup Y}$ је задата базом $B_{X \sqcup Y} := \tau_X \cup \tau_Y$



Ово је врло једноставна конструиција, али служи као основа за многе друге.
Ако X и Y нису дисјунктивни ујединимо нека тополошке просторе: $X \approx X', Y \approx Y'$
који јесу дисјунктивни ($X' \cap Y' = \emptyset$) и онда идентификујемо $X' \sqcup Y'$. Следице, имамо идентификујући $X \sqcup Y$ - простор са же копаје X

Директно из дефиниције видимо када је нешто сушти отворено у $X \sqcup Y$:

$$U \in \tau_{X \sqcup Y} \Leftrightarrow U \cap X \in \tau_X \wedge U \cap Y \in \tau_Y$$

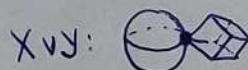
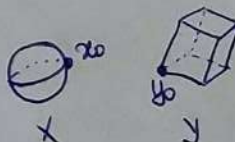
Природно се утисања $X \hookrightarrow X \sqcup Y$ и $Y \hookrightarrow X \sqcup Y$

• БУКЕТ ПРОСТОРА $X \vee Y$

Овде у сваком $\mathcal{C}$ простору бирамо по једну базну тачку: $x_0 \in X, y_0 \in Y$

Идентификујемо те базне тачке (као да "сваки" - због се назива букет)

формално: $X \vee Y := X \sqcup Y / x_0 \sim y_0$

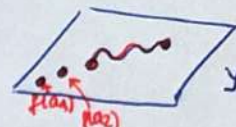


опет природно утисања: $X \hookrightarrow X \vee Y$
 $Y \hookrightarrow X \vee Y$

• ЛЕПЛОУЊЕ ПРЕСЛИКАВАЊЕМ

Уочимо $A \subset X$ и $f: A \rightarrow Y$ непрекидно

$$X \cup_f Y := (X \sqcup Y) / \sim_{f(a)}$$



$X \cup_f Y$:

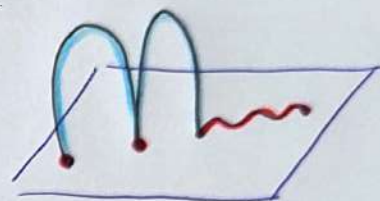
Сваку тачку из A „налепимо на њену слику“

$Y \hookrightarrow X \cup_f Y$, али X не мора да се упиша у добијени простор.

На вежбама се раде разни лепа примери:

$$A = X \Rightarrow X \cup_f Y \approx Y$$

$$f = \text{const} \Rightarrow X \cup_f Y \approx X/A \vee Y$$



• ЦИЛИНДАР ПРЕСЛИКАВАЊА

$f: X \rightarrow Y$ непрекидно

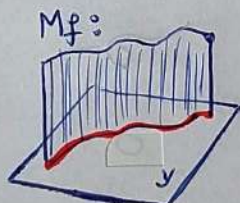
$$M_f := (X \times [0,1] \sqcup Y) / \sim_{f(x)}$$

цилиндар
пресликавања

Како конструисати? Уочимо $X \times [0,1]$ — нацрта се цилиндар простора X , и тачке његове доње основе: $(x,0)$, $x \in X$ лежи на слици $f(x)$

$$f: X \rightarrow Y$$

$X \times [0,1]$:

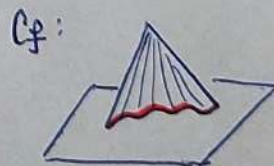


• КОНУС ПРЕСЛИКАВАЊА

$f: X \rightarrow Y$

Добија се тако што се у цилиндру пресликавања тортиremo ($t=1$) слика у тачку:

$$C_f := M_f / X \times \{1\} \approx CX \cup Y / \sim_{f(x)}$$



Класификација затворених површи се ради на вежбама намон овога, и треба са вежбама научити што као шерицу :)