

Тихоновичев теорема - наставак са предавања

На предавању смо доказали две леме:

ЛЕМА 1

X -скуп

$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\mathcal{C}$ има својство коначног пресека.

Пара $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ је максимална колекција $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ са својством коначног пресека која садржи $\mathcal{C}$.

ЛЕМА 2

X -скуп

$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\mathcal{C}$ има својство коначног пресека.

$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{C}$ $\mathcal{D}$ -максимална колекција у $\mathcal{P}(X)$ са св. кон. пресека која садржи $\mathcal{C}$ (из леме 1)

Пара $\mathcal{D}$ има следећа својства:

1° $\mathcal{D}$ је затворена у односу на коначне пресеке

2° За $E \subseteq X$ важи еквиваленција:

$$E \in \mathcal{D} \Leftrightarrow (\forall D \in \mathcal{D}) E \cap D \neq \emptyset$$

За доказ теореме нам је још потребно да се одређено карактеризације компактности:

СТАВ

(X, τ) -т.п. Следећа твђења су еквивалентна:

1) X компактан

2) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\mathcal{C}$ има својство коначног пресека $\mathcal{C}$ -фамилија затворених скупова

$$\Rightarrow \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$$

3) $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\mathcal{C}$ има својство коначног пресека

$$\Rightarrow \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \bar{C} \neq \emptyset$$

Тихоновска теорема

$\{(X_\lambda, \tau_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ - колекција топологичких простора

$X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ $\tau = \prod_{\lambda \in \Lambda} \tau_\lambda$ - Тихоновска топологија на X

Пара важи:

(X, τ) је компактн $\Leftrightarrow (\forall \lambda \in \Lambda) (X_\lambda, \tau_\lambda)$ компактн.

Доказ: $(\Rightarrow)$ (X, τ) компактн
 $\left. \begin{array}{l} p_\lambda: X \rightarrow X_\lambda \text{ непрекидна пројекција, на} \\ \text{компактност неинваријантна} \end{array} \right\} \Rightarrow (X_\lambda, \tau_\lambda) \text{ компактн} \quad \forall \lambda \in \Lambda$

$(\Leftarrow)$ Нека $(\forall \lambda \in \Lambda) X_\lambda$ компактн

Компактност (X, τ) доказујемо преко карактеризације 3) из извода.

$\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ има св. коначни пресека $\leadsto \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$
 доказујемо га

ПЕЧАЛ $\Rightarrow \exists D \subset \mathcal{P}(X)$ максимална која $\supset \mathcal{C}$ и D има св. коначни пресека

Доказујемо га: $\bigcap_{D \in D} D \neq \emptyset$

⚡ $\mathcal{C} \leadsto$ доказујемо D пресека је максимална
 $(\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \supset \bigcap_{D \in D} D)$ али због
 не постоје две различите
 у D него у $\mathcal{C}$

- Идеја: изабрати тачку ξ која $\in \bigcap_{D \in D} D$ по координатима
 фиксирамо $\lambda \in \Lambda$:

$\{p_\lambda(D) \mid D \in D\}$ има св. кон. пресека у X_λ
 (јер D има св. кон. пр. па: $\bigcap_{i=1}^n p_\lambda(D_i) \supset p_\lambda(\bigcap_{i=1}^n D_i) \neq \emptyset$)

X_λ је компактн

$\Rightarrow \bigcap_{D \in D} \overline{p_\lambda(D)} \neq \emptyset$

изаберимо $\xi_\lambda \in \bigcap_{D \in D} \overline{p_\lambda(D)}$ (*)

- Памо за $\forall \lambda \in \Lambda$ и добијемо $\xi := (\xi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$

Доказујемо сада да $\xi \in D$ за $\forall D \in D$:

B -околност божна околина тачке ξ :

$$\xi \in B = \bigcap_{i=1}^n p_{\lambda_i}^{-1}(U_i) \quad U_i \in \tau_{\lambda_i}, \quad i=1, \dots, n$$

за $\forall i=1, \dots, n$ важи: $\left. \begin{array}{l} \xi_{\lambda_i} \in U_i \in \tau_{\lambda_i} \\ \xi_{\lambda_i} \in \overline{p_{\lambda_i}(D)}, \forall D \in D \text{ (из *)} \end{array} \right\} \Rightarrow (\forall D \in D) U_i \cap p_{\lambda_i}(D) \neq \emptyset$
 (**)

Датиме, имамо: $(\forall D \in \mathcal{D}) U_{\lambda_i} \cap p_{\lambda_i}(D) \neq \emptyset$ (**)

$$\stackrel{p_{\lambda_i}^{-1}}{\Rightarrow} (\forall D \in \mathcal{D}) D \cap p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) \neq \emptyset$$

ЛЕМА 2

$$\stackrel{\text{по 2}^\circ}{\Rightarrow} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) \in \mathcal{D}$$

по имамо за све $i=1, \dots, n$:

$$p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}), \dots, p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \in \mathcal{D}$$

ЛЕМА 2

$$\stackrel{\text{по 1}^\circ}{\Rightarrow} B = \bigcap_{i=1}^n p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) \in \mathcal{D}$$

$$\text{Сада имамо } B \in \mathcal{D} \stackrel{\text{ЛЕМА 2}}{\Rightarrow} (\forall D \in \mathcal{D}) B \cap D \neq \emptyset$$

Ово важи за сваки догма B који садржи ξ
 ил. сваки догма који $\ni \xi$ садржи D , $\forall D \in \mathcal{D}$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \xi \in \bar{D}, \forall D \in \mathcal{D} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \xi \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \bar{D} \quad \checkmark$$

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \bar{D} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \bar{C} \neq \emptyset \quad \text{карактеризација} \rightarrow (X, \tau) \text{ је компактн.} \quad \square$$

☺ Доказ има неколико важних и неинтуитивних корака,
 у раду је узето мало више времена за разумевање.

Напомена: У Box-топологији бесконачног компактн. не мора бити компактн.

Пример: $X_n = (0, 1/y, \tau_d)$, $n \in \mathbb{N}$

$$X := \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \quad \tau_{Box} = \text{дискретна оведе} = \tau_d$$

(X, τ_{Box}) није компактн јер је ∞ а дискретн.