

Тензорски производ

Дефиницијо тензорски производ двенових група A и B .

Прво:

$$F(A \times B) := A \times B \langle A \times B | - \rangle = \bigoplus_{(a,b) \in A \times B} \mathbb{Z} \langle (a,b) \rangle$$

слободно дв-група
тензорске
тип елементи
 $(a,b) \in A \times B$

Потенцирајмо изразу $R(A \times B) \leq F(A \times B)$

$$R(A \times B) := \text{својства тензорске, тип елементи облика}$$

$$(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b)$$

$$(a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2)$$

Тензорски производ
група A и B :

$$A \otimes B := F(A \times B) / R(A \times B)$$

Елемент тензор: $a \in A, b \in B$

$$a \otimes b := [(a,b)] = (a,b) + R(A \times B)$$

назива се прост тензор.

Елементи $A \otimes B$ је облика: $\sum_{i=1}^m \lambda_i (a_i \otimes b_i)$ $\lambda_i \in \mathbb{Z}, a_i \in A, b_i \in B$

Прост тензори нису тензоризаци, али не морају бити база

Очигледно важи: $(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b \leftarrow \text{јер } [(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b)] = 0$

$$a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2$$

Особине:

- $0 \otimes b = 0, a \otimes 0 = 0$

$$A: a \otimes b = (0 + a) \otimes b = 0 \otimes b + a \otimes b$$

$$\Rightarrow 0 \otimes b = 0$$

и слично.

- $(-a) \otimes b = -(a \otimes b) = a \otimes (-b)$

$$\text{из } (-a) \otimes b + a \otimes b = (-a + a) \otimes b = 0 \otimes b = 0, \dots$$

- $na \otimes b = n(a \otimes b) = a \otimes nb, n \in \mathbb{Z}$

јер...

+ одговарајуће за производ група
заједно важи: $A \otimes 0 = 0$
 $0 \otimes A = 0$

Продефинишемо се:

за A, B, C и $\psi: A \times B \rightarrow C$ је билинеарно ако

$$\psi(a_1 + a_2, b) = \psi(a_1, b) + \psi(a_2, b)$$

$$\psi(a, b_1 + b_2) = \psi(a, b_1) + \psi(a, b_2)$$

Одмах примећујемо да је арескивање

$$\varphi: A \times B \rightarrow A \otimes B \quad \text{билинеарно}$$

$$(a, b) \mapsto a \otimes b$$

$\Rightarrow$ Ако композиционо произвођан хомоморфизам $\Psi: A \otimes B \rightarrow C$

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B & \xrightarrow{\Psi} & C \\ \uparrow \varphi & \nearrow \Psi & \\ A \times B & & \end{array}$$

композиција

$$\psi := \Psi \circ \varphi$$

је билинеарно арескивање (гопати-провера)

Једна од суштинских особина $\otimes$ јесте да можемо обрнуто - од билинеарног φ до јединственог хомоморфизма Ψ :

$$\boxed{\text{I}} \quad A, B, C \text{ абелови}$$

$\varphi: A \times B \rightarrow C$ билинеарно

$$\begin{array}{ccc} A \otimes B & \xrightarrow{\Psi} & C \\ \uparrow \varphi & \nearrow \psi & \\ A \times B & & \end{array}$$

$\Rightarrow \exists!$ хомоморфизам $\Psi: A \otimes B \rightarrow C$ так да $\Psi \circ \varphi = \psi$

$$\text{тј. } \Psi(a \otimes b) = \psi(a, b)$$

$\Rightarrow$ Вратимо се на $F(A \times B)$ -модуле са базом $A \times B$

$\Rightarrow$ било која функција $\psi: A \times B \rightarrow C$

изјучује хомоморфизам $\bar{\psi}: F(A \times B) \rightarrow C$

јер је задати на генераторима:

$$\bar{\psi}(a_i b_j) = \psi(a_i, b_j)$$

$$F(A \times B) / R(A \times B) = A \otimes B$$

$$\begin{array}{ccc} F(A \times B) / R(A \times B) & \xrightarrow{\Psi} & C \\ \uparrow \pi & \nearrow \bar{\psi} & \\ F(A \times B) & \xrightarrow{\bar{\psi}} & C \\ \uparrow & \nearrow \psi & \\ A \times B & & \end{array}$$

Пошто је ψ билинеарно, долази ваљати:

$$\bar{\psi}((a_1 + a_2)b - (a_1b) - (a_2b)) = \psi((a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b)) = 0$$

$$\bar{\psi}(a_1(b_1 + b_2) - (a_1b_1) - (a_1b_2)) = \psi(a_1, (b_1 + b_2) - (b_1) - (b_2)) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\psi}|_{R(A \times B)} = 0$$

$\Rightarrow \bar{\psi}$ се факторизује кроз $F(A \times B) / R(A \times B) = A \otimes B$

тј. $\exists$ хомоморфизам $\Psi: A \otimes B \rightarrow C$

такав да $\bar{\psi} = \Psi \circ \pi$ π -комичко

$\rightarrow \exists \Psi \checkmark$

Треба показати да је Ψ јединствен:

елементи $a \otimes b$ чине генерацију $A \otimes B$,

а на нама мора: $\Psi(a \otimes b) = \bar{\psi}(a, b) = \psi(a, b)$

$\Rightarrow$ јединствен одређен на свима

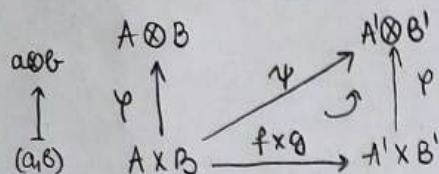
$\Rightarrow$ јединствен случај $\checkmark \square$

Тензорски производ, хомоморфизма:

$f: A \rightarrow A'$, $g: B \rightarrow B'$ хомоморфизми

$\Rightarrow f \times g: A \times B \rightarrow A' \times B'$ хомоморфизам

На дијаграму:



преко γ и ψ

$$\psi = \gamma \circ (f \times g)$$

оно је билинеарно

✓ (за доказати)

Универзална теорема

$\Rightarrow \exists!$ хомоморфизам

$$f \otimes g: A \otimes B \rightarrow A' \otimes B'$$

-ТЕНЗОРСКИ
ПРОИЗВОД, f и g

$$\text{шг. } (f \otimes g) \circ \psi = \gamma$$

$$\text{шг. } f \otimes g (a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$$

$$\text{Важна својство: } (f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$$

(када се слажу домени/кодомени)

Такође ће често бити потребно:

$A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ $f: B \rightarrow B'$ хомоморфизам

$$1 \otimes f: A \otimes B \rightarrow A \otimes B'$$

Особине:

$$1) A \otimes B \cong B \otimes A$$

и $h: A \times B \rightarrow B \otimes A$

$$(a, b) \mapsto b \otimes a$$

... ово је билинеарно

$$\Rightarrow \exists! \text{ хомоморфизам } h: A \otimes B \rightarrow B \otimes A$$

$$a \otimes b \mapsto b \otimes a$$

Слично изабралимо инверзно...

$$2) \left(\bigoplus_{i \in I} A_i \right) \otimes B \cong \bigoplus_{i \in I} (A_i \otimes B)$$

$$A \otimes \left(\bigoplus_{j \in J} B_j \right) \cong \bigoplus_{j \in J} (A \otimes B_j)$$

3) асоцијативност:

$$(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$$

$$4) \cdot \mathbb{Z} \otimes B \cong B$$

функција $\varphi: \mathbb{Z} \times B \rightarrow B$ је двумарна (апретријана)
 $(n, g) \mapsto ng$

$\Rightarrow$ индукује хомоморфизам $\phi: \mathbb{Z} \otimes B \rightarrow B$
 $n \otimes b \mapsto nb$

Помањемо и $\psi: B \rightarrow \mathbb{Z} \otimes B$
 дефинисао да $g \mapsto 1 \otimes g$

Показујемо да $\phi \circ \psi = 1$ и $\psi \circ \phi = 1$:

$$\phi \circ \psi(b) = \phi(1 \otimes b) = 1 \cdot b = b \quad \checkmark$$

$$\psi \circ \phi(n \otimes b) = \psi(nb) = 1 \otimes nb = n \cdot (1 \otimes b) = n \otimes b \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z} \otimes B \xrightleftharpoons[\psi]{\phi} B$$

$(\cong)$

$$\text{аналогно, } A \otimes \mathbb{Z} \cong A$$

Додатно, показује се да имамо природан дик изоморфизма,
 из: комулатор гомоморфизма:

за сваки
 хомоморфизам
 $f: B \rightarrow H$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \otimes B & \xrightarrow[\phi]{\cong} & B \\ \downarrow \mathbb{1}_{\mathbb{Z}} \otimes f & \circlearrowleft & \downarrow f \\ \mathbb{Z} \otimes H & \xrightarrow[\phi]{\cong} & H \end{array}$$

Сада нас занима да ли тензорски производ одсликавања кува
 особине ЕПН, моно, изо.

[ЕПН] Ваин теорема:

$$\boxed{\square} \quad \begin{matrix} f: A \rightarrow A' \\ g: B \rightarrow B' \end{matrix} \text{ у епиморфизми}$$

$\Rightarrow f \otimes g: A \otimes B \rightarrow A' \otimes B'$ је такође епиморфизам,

а $\ker(f \otimes g)$ је скупина од $A \otimes B$ тензорских елемената
 $a \otimes b$ таквих да је $a \in \ker f$ или $b \in \ker g$.

Д. - Munkres, Ch 6, § 50, Lemma 50.3.

Δ

МОНО Не мора! f, g ако су f и g мономорфизми, $f \otimes g$ не мора бити мономорфизам!

Пример: правилно постоји:

$$\rightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \quad / \otimes \mathbb{Z}_2 ?$$

$$\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_2 = 0 \quad \text{+ доказ: произван } 2 \otimes a \in \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_2 \text{ задовољава:}$$

$$2 \otimes a = (2 \cdot \frac{2}{2}) \otimes a = \frac{2}{2} \otimes (2a) = 0 \quad \square$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \not\subset \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_2$$

$$\text{формом } \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \text{ мономорфизам}$$

$$\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{1 \otimes \mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2 \text{ мономорфизам}$$

$$\leadsto \underbrace{\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2}_{\mathbb{Z}_2} \xrightarrow{i \otimes 1_{\mathbb{Z}_2}} \underbrace{\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_2}_0 \text{ није мономорфизам сурјект!}$$

ИЗО Изоморфизме мора:

$$f, g \text{ изо} \Rightarrow f \otimes g \text{ изо}$$

$$\text{Д. } f^{-1}, g^{-1} - \text{инверзи изо}$$

$$\Rightarrow (f^{-1} \otimes g^{-1}) \circ (f \otimes g) = (f^{-1} \circ f) \otimes (g^{-1} \circ g) = 1 \otimes 1 = 1$$

$$(f \otimes g) \circ (f^{-1} \otimes g^{-1}) = \dots = 1 \quad \checkmark \quad \square$$

Како се понаша са шатним изоморфизмима?

СТАВ $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ шатан изд. Држа и хомоморфизма

$$G \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow A \otimes G \xrightarrow{f \otimes 1_G} B \otimes G \xrightarrow{g \otimes 1_G} C \otimes G \rightarrow 0 \text{ је шатан.}$$

Д. Munkres, Chapter 6, § 50, Theorem 50.4. Δ

Ово заправо каже да је $- \otimes G$ десно-шатан функтор (показе се да функтор јесће)

Деф. $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ функтор

F је **ТАЧАН** ако за сваки КТН $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$

$$\text{важи: } 0 \rightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \rightarrow 0 \text{ КТН шатотје}$$

F је **ДЕСНО-ТАЧАН** (right-exact) ако за сваки КТН $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$

$$\text{важи: } F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \rightarrow 0 \text{ КТН}$$

$- \otimes G$ је десно шатан а није шатан

$$\text{Пр: } 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{j} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0 \text{ КТН } / \otimes \mathbb{Z}_2$$

$$0 \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2}_{\mathbb{Z}_2} \xrightarrow{1 \otimes \mathbb{Z}_2} \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{1 \otimes \mathbb{Z}_2} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$$

$\mathbb{Z}_2$ - овде немамо шатнети!

Сага можето израчунава:

Лема $n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_n \otimes G \cong G/nG = \text{coker}(G \xrightarrow{n} G)$$

$$\text{Д. } 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{p_n} \mathbb{Z}_n \rightarrow 0 \text{ ктн } / \otimes G$$

$$\text{прех. лема.} \Rightarrow \text{така: } \mathbb{Z} \otimes G \xrightarrow{n \otimes 1_G} \mathbb{Z} \otimes G \xrightarrow{p_n \otimes 1_G} \mathbb{Z}_n \otimes G \rightarrow 0 \quad (1)$$

Применуваме го за произволно $k \in \mathbb{Z}, g \in G$ важи:

$$(n \otimes 1_G)(k \otimes g) = (nk \otimes g) = k \otimes ng = (1_{\mathbb{Z}} \otimes n)(k \otimes g)$$

$$\Rightarrow \boxed{n \otimes 1_G = 1_{\mathbb{Z}} \otimes n}$$

Можето заменим при хомоморфизам γ (1) и искористам природност коју смо имаме ког преносиме са $\mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} \otimes G & \xrightarrow{1_{\mathbb{Z}} \otimes n} & \mathbb{Z} \otimes G & \xrightarrow{p_n \otimes 1_G} & \mathbb{Z}_n \otimes G \rightarrow 0 \\ \cong \uparrow \psi_G & & G & \cong \uparrow \psi_G & \\ G & \xrightarrow{n} & G & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{така е: } G \xrightarrow{n} G \xrightarrow{(p_n \otimes 1_G) \circ \psi_G} \mathbb{Z}_n \otimes G \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_n \otimes G \cong G / \ker((p_n \otimes 1_G) \circ \psi_G) \stackrel{\text{тако е}}{=} G/nG$$

које слика $(p_n \otimes 1_G) \circ \psi_G$ на И.Т. изоморф.

$$1 \otimes g \longrightarrow [g]_{nG}$$

Подсетиме се:

Лема G -конечна аб. група $f: G \rightarrow G$ хомоморфизам

$$\Rightarrow |\ker f| = |\text{coker } f|$$

$$\text{Д. И.Т. изоморфизмима} \Rightarrow \text{im } f \cong G/\ker f \Rightarrow |\text{im } f| = |G|/|\ker f|$$

групи релатива, $|\ker f| = |G|/|\text{im } f| = |G/\text{im } f| = |\text{coker } f|$

Лема $m, n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \ker(\mathbb{Z}_m^n \rightarrow \mathbb{Z}_m) \cong \text{coker}(\mathbb{Z}_m^n \rightarrow \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_d, \quad d = \text{HЗД}(m, n)$$

А. $\ker(\mathbb{Z}_m^n \rightarrow \mathbb{Z}_m)$ је циклическа јер је подгрупа циклическе ✓
 coker је циклическа $\Rightarrow$ циклическа ✓
 и сваки циклически елемент
 $\Rightarrow$ изоморфна ✓

Види се да $\ker(\mathbb{Z}_m^n \rightarrow \mathbb{Z}_m) \cong \mathbb{Z}_d$

Нека $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ $m = dm'$ $n = dn'$ $(m', n') = 1$

$$x \in \ker(\mathbb{Z}_m^n \rightarrow \mathbb{Z}_m) \Leftrightarrow nx = 0 \text{ у } \mathbb{Z}_m$$

$$\Leftrightarrow m \mid nx = d n' x$$

$$\Leftrightarrow dm' \mid dn' x$$

$$\Leftrightarrow m' \mid n' x \Leftrightarrow m' \mid x \Leftrightarrow x \in \{0, m', 2m', \dots, (d-1)m'\}$$

јачао $\mathbb{Z}_d$ ✓ □

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{\text{HЗД}(m, n)}$$

и ако су m и n уз. бројеви, $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong 0$.

Још неким корисним особина тензорског производа:

□ A -слободна в.г. с.б.з. $\{e_j \mid j \in J\}$
 B — I — $\{f_i \mid i \in I\}$

$\Rightarrow A \otimes B$ је с.б.з. в.г. с.б.з. $\{e_j \otimes f_i \mid j \in J, i \in I\}$

$$\mathbb{Z}^k \otimes \mathbb{Z}^l \cong \mathbb{Z}^{kl}$$

Munkres, Ch6, §50, Th. 50.8.

$$\square 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0 \text{ КТН}$$

1) ако се овај КТН узима, онда се за произвољну в.г. с.б.з. G тензорисава са G добива КТН који се узима:

$$0 \rightarrow A \otimes G \xrightarrow{f \otimes 1_G} B \otimes G \xrightarrow{g \otimes 1_G} C \otimes G \rightarrow 0$$

2) ако је F с.б.з. в.г. с.б.з. онда је HЗ

$$0 \rightarrow A \otimes F \xrightarrow{f \otimes 1_F} B \otimes F \xrightarrow{g \otimes 1_F} C \otimes F \rightarrow 0 \text{ КТН}$$

и ако је F с.б.з. , $\text{HЗ} \xrightarrow{f \otimes 1_F} \text{HЗ}$ је шаран фунитор.