# Животно осигурање

1. Када се номинална годишња каматна стопа $j$ конвертује у полугодишњу, садашња вредност серије уплата у износу 1 на крају сваке 2 године која траје заувек је 5.89. Одредити $j$.

2. Зајам од 1000 са номиналном каматном стопом 12% која се обрачунава месечно ће бити отплаћен са 6 месечних рата, прва уплата доспева на крају месеца. Прве три уплате су по $x$, а последње три по $3x$. Одредити $x$.

3. Добит од полисе осигурања у случају смрти се може исплатити на 4 начина, где сви имају исту садашњу вредност:

   1) Доживотна рента од 120 на крају сваког месеца, прва исплата месец дана након смрти осигураног лица.
   2) Исплате од 365.47 на крају сваког месеца током $n$ година, прва месец дана након смрти осигураног лица.
   3) Исплата од 17866.32 на крају $n$ година од смрти.
   4) Исплата $x$ у тренутку смрти.

   Израчунати $x$.

4. Компанија мора да повуче издату обвезницу са 5 годишњих плаћања од 15000. Прва уплата доспева 31.12.1999. Да ви сакупила средства, компања од 1.1.1990 сваке године уплаћује износ $x$ на рачун са ефективном каматном стопом 6% на годишњем нивоу. Последња уплата је 1.1.1999. Израчунати $x$.

5. Зајам од 4000 се отплаћује 30-то годишњим растућим ануитетом плативим накнадно. Почетна уплата је $k$, свака следећа је за $k$ већа од претходне. Годишња ефективна каматна стопа је 4%. Одредити неизмирену главницу након 9 година.

6. Марко плаћа 98.51 за обвезницу која ће достићи вредност 100 за једну годину. Купони се исплаћују 6-то месечно са купонском стопом 4%. Одредити добит до доспећа.

7. Доживотна рента се састоји од годишњих растућих уплата $(1+k), (1+k)^2, (1+k)^3, ...,$ почевши од краја прве године са ефективном годишњом стопом каматном стопом од 4%, садашња вредност (једну годину пре прве уплате) је 51. Одредити $k$.

8. Депозит од 100000 је стављен у новчани фонд. Фонд плаћа номиналну камату од 12% са кварталним камаћењем. На крају сваких 6 месеци подиже се новац из фонда. Прво подизање је $x$, друго $2x$, треће $3x$, итд. Последњим, 6-тим подизањем се у потпуности празни фонд. Одредити $x$.

9. Компанија позајмљује 10000. Камата од 350 се плаћа полугодишње, а главница се плаћа на крају 5-те године када се цео зајам отплати. Да би сакупила главницу зајма, компанија прави једнаке полугодишње депозите, први доспева за 6 месеци, у фонд са каматном стопом 6% на годишњем нивоу која се обрачунава полугодишње. Одредити каматну стопу на годишњем нивоу за читаву трансакцију.

10. Банка на штедни рачун на почетку године даје 8% на првих 100000 и 9% на износ преко 100000. Почетни депозит је 300000. Једну годину касније почиње подизање износа $x$ годишње и подиже се док износ се не исцрпи 10-тим подизањем. Одредити $x$.

11. Ако је дато ${}_tp_x = \frac{100-x-t}{100-x}$ за $0 \leq x < 100$ и $0 \leq t \leq 100 - x$, одредити $\mu_{45}$.

12. Ако је ${}_tp_x = \left(\frac{1+x}{1+x+t}\right)^3$ за $t \geq 0$, одредити очекивану преосталу дужину живота особе која има $x = 41$ година.

13. Ако је $\mu_{x+t}$ константа за $0 \leq t < 1$ и $q_x = 0.16$, одредити вредност $t$ за коју је ${}_tp_x = 0.95$.

14. Нека је ${}_tp_x = \left(\frac{100-x-t}{100-x}\right)^2$, за $0 \leq t \leq 100 - x$. Одредити $DT(x)$

15. Дата је следећа табела вредности $e_x$

| године $x$ | $e_x$ |
|---|---|
| 75 | 10.5 |
| 76 | 10.0 |
| 77 | 9.5 |

Одредити вероватноћу да ће особа која има 75 година преживети до 77 године.

16. Посматрајмо два идентична живота која се разликују само по томе што је један пушач а други не. Нека је

- $\mu_x$ интензитет смртности непушача, $0 \leq 0 < \omega$,
- $c\mu_x$ интензитет смртности пушача, $0 \leq 0 < \omega$, $c$ константа, $c > 1$.

Израчунати вероватноћу да преостало време живота пушача превазиђе непушача.

17. Дата је таблица смртности.

(а) Одредити $d_x$ и $1000q_x$, $x = \overline{0, 99}$.

(б) Одредити $e_x$, $x = \overline{0, 99}$, ако је $e_{99} = p_{99} = 0$.

18. Нека је $q_x = 0.10$.

(а) Нацртати график $\mu_{x+v}$ за $v$ од 0 до 1 са размаком 0.05 ако је 1) ${}_vq_x$ линеарно; 2) $\mu_{x+v} = const$; 3) ${}_{1-v}q_{x+v}$ линеарно.

(б) Урадити исто као под $a$) за ${}_vq_x$.

19. Нека је: $A_{x:\overline{n|}} = U$, $A^1_{x:\overline{n|}} = Y$ и $A_{x+n} = Z$. Одредити $A_x$.

20. $Z_1$ је садашња вредност случајне величине непрекидног мешовитог осигурања са трајањем $n$ у износу 1 издатог особи старости $x$. $Z_2$ је садашња вредност непрекидног доживотног осигурања са трајањем $n$ у износу 1 издатог особи старости $x$. Ако је $DZ_2 = 0.01$ $v^n = 0.30$, ${}_np_x = 0.8$ и $EZ_2 = 0.04$, одредити $DZ_1$.

21. Одредити $A_{45:\overline{20|}}$ на основу таблица смртности и $i = 5\%$.

22. Двогодишње привремено осигурање издато је особи старости $x$ и врши се исплата од 1, ако наступи смрт, на крају године смрти. Ако је $q_x = 0.50$, $i = 0$, $DZ = 0.1771$, где је $Z$ садашња вредност будуће исплате, одредити $q_{x+1}$.

23. Сваки од 100 чланова клува старости $x$ је приложио износ $\omega$ у фонд. Фонд има камату $i = 10\%$ годишње и има обавезу да плати 1000 када неки од чланова умре. Вероватноћа да ће фонд моћи да исплати обавезу је 0.95. Ако је $\overline{A}_x = 0.06$ и ${}^2\overline{A}x = 0.01$, одредити $\omega$. Претпоставити да су будућа времена живота независна и да имају нормалну расподелу.

24. Десетогодишње привремено осигурање за $(x)$ покрива следеће исплате на крају године смрти

| Година смрти | Исплата |
|---|---|
| 1 | 10 |
| 2 | 10 |
| 3 | 9 |
| 4 | 9 |
| 5 | 9 |
| 6 | 8 |
| 7 | 8 |
| 8 | 8 |
| 9 | 8 |
| 10 | 7 |

Одредити нето премију за ову полису.

25. Трогодишње привремено осигурање за $(x)$ једефинисано табелом:

| година $t$ | износ | $q_{x+t}$ |
|---|---|---|
| 0 | 3 | 0.20 |
| 1 | 2 | 0.25 |
| 2 | 1 | 0.50 |

Дато је $v = 0.9$, исплата се врши на крају године смрти, а очекивана садашња вредност исплате је П. Одредити вероватноћу да садашња вредност исплате која ће се извршити превазилази П.

26. Нека је функција преживљавања $s(x) = 1 - \frac{x}{100}$, $0 \leq x \leq 100$, а каматна стопа $\delta = 0.10$. Одредити $50000\ \overline{A}_{30}$

27. (а) Одредити $A_x$ за дате таблице смртности и $i = 5\%$ уз помоћ формуле $A_x = vq_x + vA_{x+1}p_x$. Нацртати график $A_x$ за $i = 0.25, 5, 7.5, 10\%$ и $x = \overline{0, 99}$

    (б) Формула за растуће животно осигурање је $(IA)_x = v\ q_x + vp_x(A_{x+1} + (IA)_{x+1})$. Одредити његову вредност за $i = 5\%$.

28. Одредити једнократну нето премију растућег 20-то годишњег привременог осигурања ако је $x = 25$, а износи: 1 за прву годину, $1+g$ за другу, $(1+g)^2$ за трећу, итд. Користити $i = 5\%$, $g = 6\%$.

29. Одредити нето појединачну премију опадајућег доживотног осигурања са почетним износом $100 - x$ за особу са $x$ година и опада сваке године за 1. Износ се исплаћује на крају године смрти, $i = 5\%$, а $x = 50$.

30. За особу старости $x = 35$ одредити дисперзију садашње вредности случајне величине доживотног осигурања од 1000. Каматна стопа $i$ варира од 0 до 25% са размаком 0.5%. Смртност прати таблице. Нацртати график.

31. Користећи претпоставку о линеарности $_u q_x$ и таблице смртности са ефективном каматном стопом 5%, одредити $\ddot{a}^{(2)}_{40:\overline{30}|}$.

32. Дате су следеће информације везане за трогодишњи привремени ануитет платив унапред, за особу старости $(x)$:

| $t$ | испалта | $p_{x+t}$ |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 0.80 |
| 1 | 3 | 0.75 |
| 2 | 4 | 0.50 |

и $v = 0.9$.

а) Одредити дисперзију садашње вредности исплата.

б) Одредити вероватноћу да садашња вредност испалата превазилази 4.

33. Показати да је

$$_np_x d\ddot{a}_{\overline{n}|} + \sum_{k=0}^{n-1}(1 - v^{k+1})_k p_x q_{x+k} = 1 - A_{x:\overline{n}|}.$$

34. Нека је $Y$ садашња вредност случајне величине која представља доживотни ануитет платив унапред у износу 1 годишње издат особи старости $x$. Ако је $\ddot{a}_x = 10$, израчунато за $i = \frac{1}{24} = e^{\delta} - 1$, а $\ddot{a}_x = 6$ израчунато за $i = e^{2\delta} - 1$, одредити дисперзију од $Y$.

35. Нека је $l_x = 100000(100 - x), 0 \leq x \leq 100$ и $i = 0$. Ако се ануитет плаћа непрекидно годишњим износима 1 за прву годину и 2 касније, одредитит:

а) садашну вредност доживотног ануитета издатог особи старости 80 година;

б) садашну вредност привременог 5-то годишњег ануитета издатог особи старости 80 година.

36. Дата су следеће вредности за $i = 3\%$

| $x$ | $\ddot{a}_x$ |
|---|---|
| 72 | 8.06 |
| 73 | 7.73 |
| 74 | 7.43 |
| 75 | 7.15 |

Одредити $p_{73}$.

37. За каматну стопу $\delta > 0$ важи $E(\bar{a}_{\overline{T}|}) = 10$. Са истом смртношћу, али каматом $2\delta$, вредност $E(\bar{a}_{\overline{T}|})$ је 7.375. Ако је $D(\bar{a}_{\overline{T}|}) = 50$, одредитит $\bar{A}_x$.

38. Дато је

| $x$ | 69 | 70 | 71 | 72 | $\cdots$ | 79 | 80 | 81 | 82 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $S_x$ | 77.938 | 67.117 | 57.520 | 49.043 | $\cdots$ | 13.483 | 10.875 | 8.691 | 6.875 |

Одредити $(D\ddot{a})_{70:\overline{10}|}$, што представља садашњу вредност опадајућег ануитета, са првом уплатом од 10 у 70-тој години, другом 9 у 71-ој, итд. Последња уплата је 1 по плану у 79-тој години

39. Одредити $\ddot{a}_x$ на основу таблица смртности и $i = 5\%$ користећи рекурзивну формулу. Нацртати график вредности $\ddot{a}_x$ за $i = 0, 2.5, 5, 7.5, 10\%$ и $x = \overline{0, 99}$.

40. Одредитит $\ddot{a}_{x+u}^{(m)}$ и $A_{x+u}$ за дате године $x + u, 0 \leq u < 1$ и дату каматну стопу $i$ на основу таблица смртности.

41. Симулирати 200 вредности $Y = 1 + \upsilon + \cdots + \upsilon^K = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$, при чему је $K = K(40)$, $i = 5\%$ и смртност прати таблице. Упоредитит узорачке и теоријске вредности очекивања и дисперзије.

42. Нека је ${}_{20}P_{25} = 0.046, P_{25:\overline{20}|}$ и $A_{45} = 0.640$. Одредити $P^{1}_{25:\overline{20}|}$.

43. Периодичне премије доживотног осигурања у износу 1 који се исплаћује на крају године смрти, издата је особи старости $x$. Премија $G$ се плаћа на почетку године, ако је особа преживела годину. Ако је:

    1) $L$ је губитак осигуравача када је $G = P_x$,

    2) $L^*$ је губитак осигуравача када је $G$ изабрано тако да је $EL^* = -0.20$,

    3) $DL = 0.30$,

    одредитит $DL^*$.

44. Доживотно осигурање издато особи старости $x$ обезбеђује надоканаду у случају смрти у $j-$тој години у износу $b_j = 1000 \cdot 1.06^j$ на крају године смрти. Константна годишња премија се плаћа доживотно. Нека је $P_x = 10^{-2}$ и $i = 0.06$ годишње. Одредити годишњу нето премију.

45. Случајна величина $L$ је губитак осигуравача потпуно дискретног $2-$годишњег привременог осигурања од 1 издатог особи старости $x$. Нето константна премија се рачуна користећи принцип еквиваленције. Ако је

    1) $q_x = 0.1$,

    2) $q_{x+1} = 0.2$,

    3) $\upsilon = 0.9$,

    одредити $DL$.

46. Доживотно осигурање је издато особи старости $x$ и обезбеђује осигурану суму од 10000. Годишње уплате е прше на почетку године у периоду од 20 година, а осигурана сума се плаћа на крају године смрти. Повраћај премије је активан током периода плаћања премије тако што се половина последње премије која се уплати враћа као додатак на осигурану суму. Одредити годишњу нето премију.

47. Ако је

    1) $A_x = 0.25$,

    2) $A_{x+20} = 0.40$,

    3) $A_{x:\overline{20}|} = 0.55$,

    4) $i = 0.03$,

    5) ${}_uq_x$ је линеарна функција,

    одредити $1000P(\bar{A}_{x:\overline{20}|})$.

48. Ако је $i = 0.05$ и $10000A_x = 2000$ и ${}_uq_x$ линеарна функција, одредити $10000\bar{P}(\bar{A}_x) - 10000P(\bar{A}_x)$.

49. Десетогодишње привремено осигурање са потпуно непрекидним константним премијама издата особи старости $x$ обезбеђује надокнаду од 1 у тренутку смрти плус повраћај свих премија које су плаћене акумулиране за камату. Каматна стопа која се користи за рачунање надокнаде је иста као за рачунање садашње вредности осигуравачевог губитка. Нека је $G$ стопа годишње премије која се плаћа непрекидно.

   а) Одредити израз за осигуравачев губитак $L$.

   б) Одредити израз за $DL$.

   в) Показати да ако је $G$ одређено из принципа еквиваленције, онда $DL = {}^2\bar{A}^1_{x:\overline{10}|} + \frac{(\bar{A}^1_{x:\overline{10}|})^2}{{}_{10}p_x}$.

50. Ако је

   1) $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = 0.4275$,

   2) $\delta = 0.055$,

   3) $\mu_{x+t} = 0.045, t \geq 0$,

   одредити $1000\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}|})$.

51. Четворогодишњи лизинг за ауто издат особи старости $x$ се исплаћује једнаким годишњим уплатама на крају сваке године. Четворогодишње привремено осигурање има надокнаду у случају смрти која ће отплатити лизинг на крају године смрти, укључхујући доспелу уплату. Нека је $i = 0.06$ за све прорачуне, $\ddot{a}_{25:\overline{4}|} = 3.667$ и ${}_4q_{25} = 0.005$.

   а) Одредити осигуравачев губитак у терминима очекиване целобројне дужине живота $K$ за особу старости $x = 25$ и износ лизинга 1000, претпостављајући да се осигурање купуије једнократном нето премијом $G$.

   б) Одредити једнократну нето премију за лизинг од 1000.

   в) Лизинг за аутомобил је 10000. Купац додатно позајмљује износ за привремено осигурање. Одредити укупно годишње плаћање.

52. Користећи таблице смртности одредити почетну годишњу нето премију доживотног осигурања издатог особи старости $x = 30$. Накнада у случају смрти је заштићена од инфлације: сваке године накнада за случај смрти и годишња премија расту за фактор $1+j$, где је $j = 0.06$. Одредити премију за каматну стопу $i = 0.05, 0.06, 0.07, 0.08$. Нацртати график зависности полазне премије од $i$.

53. Полиса доживотног осигурања је издата особи старости 10 година са премијом која се плаћа доживотно. Ако смрт наступи пре 15-те године живота, накнада је повраћај уплаћених нето премија са каматом, на крају године смрти. Ако смрт наступи након 15-те године живота, накнада је 1000. Одредити годишњу нето премију користећи таблице смртности и $i = 5\%$.

54. Одредити проценат $z$ годишњих зарада које особа мора да сачува сваке године како би обезбедила пензију које износи 50% последње плате. Претпоставити да особа има 30 година, да у пензију иде са 65 година, да је зарада на уштеђевину 5% на годишњем нивоу, плата расте стопом $j = 6\%$ годишње, а мртност прати таблице. Нацртати график од $z$ у односу на $j$ од 3 до 7% са размаком 0.5%.

55. Двадесетогодишња полиса потпуно дискретног мешовитог осигурања од 1000 је издата особи старости 35 година на основу таблица смртности и $i = 5\%$. Одредити износ редукованог $paid - up$ осигурања доступног на крају 5-те године, а пред доспеће 6-те премије. Претпоставити да читава резерва је доступна за исплаћивање полисе.

56. Дато је ${}_{10}V_{25} = 0.1$ и ${}_{1}0V_{35} = 0.2$. Одредити ${}_{2}0V_{25}$.

57. Дати су следећи подаци за потпуно дискретно трогодишње мешовито осигурање осигурање издато особи старости $x$:

| $k$ | $c_{k+1}$ | $q_{x+k}$ |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 0.20 |
| 1 | 3 | 0.25 |
| 2 | 4 | 0.50 |

Константне годишње нето премије у износу 1 се плаћају на почетку сваке године док је особа жива. Износ мешовитог осигурања је једнака нето резерви премија за 3 године. Ефективна годишња каматна стопа је $i = \frac{1}{9}$. Одредити резерву на истеку полисе рекурзивно, ако је ${}_{0}V = 0$.

58. Ако је $i = 0.06, q_x = 0.65, q_{x+1} = 0.85$ и $q_{x+2} = 1.00$, одредити ${}_{1}V_x$.

59. Израчунати дисперзију губитка $\Lambda_1$ додељеног полиси из задатка 57.

60. Полиса доживотног осигурања од 1000 је издата 1. маја 1978. особи старости $x = 60$. Ако је:

1) $i = 0.06\%$,
2) $q_{70} = 0.033$,
3) $1000_{10}V_{60} = 231.14$,
4) $1000P_{60} = 33$,
5) $1000_{11}V_{60} = 255.40$,

одредити приближну вредност резерве 31. децембра 1988.

61. Користећи таблице смртности и $i = 0.05$, одредити:

а) $1000_{15}V_{45:\overline{20|}}$,
б) $1000_{15}V^{1}_{45:\overline{20|}}$.

62. Дато је потпуно дискретно доживотно осигурање од 1500 са годишњим константним премијама издато особи старости $x$ са

1) $i = 0.05\%$,
2) резерва на крају године $h$ је 205,
3) резерва на крају године $h - 1$ је 179,
4) $\ddot{a}_x = 16.2$.

Одредитит $1000q_{x+h-1}$.

63. За потпуно дискретно одложено 20 година животни ануитет од 1 годишње издат особи старости 35 важи:

1) смртност прати таблице,
2) $i = 0.05$,
3) константна годишња нето премија се плаћа 20 година.

Одредити нето резерву премија на крају 10-те године.

64. Одредити вредност ${}_tV_{30}, t = \overline{0, 69}$, користећи таблице смртности и $i = 4\%$. Нацртатитри графика ${}_tV_{30}$ као функције од $t$, у односу на $i = 4\%, 6\%$ и $8\%$.

65. Десетогодишње мешовито осигурање са назначеним износом 1000 издато је особи старости 50. Одредити премију за штедњу и премију ризика нето годишње премије $1000P_{50:\overline{10|}}$ током трајања полисе. Користити таблице смртности и $i = 4\%$.