

Matematička statistika

zadaci za vežbu

1. Neka je $NB(r, p)$ ($P\{X = x\} = \binom{x+r-1}{r-1} p^r (1-p)^x$, $x \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{N}$) familija negativnih binomnih raspodela. Naći KDS ako je r poznato.
2. Neka je data familija raspodela sa gustinama $f(x; \lambda, \alpha) = \lambda \alpha e^{-\alpha x - \lambda e^{-\alpha x}}$. Naći KDS za parametar (λ, α) .
3. Neka je X iz familije raspodela sa gustinama

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\pi \sigma} \left[1 + \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]^{-1}$$

$-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$, $0 < \sigma < \infty$. Naći minimalnu dovoljnu statistiku za (μ, σ) .

4. Neka je X iz familije raspodela

$$f(x; \mu, \sigma, p, q) = \frac{1}{\sigma B(p, q)} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{p-1} \left(1 - \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{q-1}$$

$-\mu \leq x \leq \mu + \sigma$; $-\infty < \mu < \infty$; $0 < \sigma < \infty$, $0 < p, q < \infty$.

- Naći minimalnu dovoljnu statistiku ako su sva četiri parametra nepoznata
 - Naći MDS ako su p i q poznati.
 - Naći MDS ako su μ i σ poznati.
5. Da li je familija normalnih $N(m, \sigma^2)$ regularna u smislu Rao-Kramera? Naći donju granicu disperzija nepristrasnih ocena za parametar σ^2 . Ako je m poznato, da li se ta granica dostiže za ocenu $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$? Ako je m nepoznato, da li se ona dostiže za ocenu $\widehat{S}_n^2$?

6. Naći JNO za θ^2 kod familije $\epsilon(1, \theta)$.
7. Za familiju raspodela $N(\theta, 1)$ pokazati da je JNO za θ^2 $\bar{X}_n^2 - \frac{1}{n}$. Da li se dostiže donja granica disperzija Rao-Kramera?

Minimalne dovoljne statistike

Osim dovoljnosti kojom se opisuju statistike koje sadrže sve informacije o parametru, bitan je i pojam minimalnosti dovoljne statistike. Minimalna dovoljna statistika predstavlja dovoljnu statistiku najmanje moguće dimenzije. Do sada u zadacima koji su bili formulisani sa: "Naći dovoljnu statistiku za..." uglavnom smo tražili baš minimalne dovoljne statistike. Podsetimo se, vektor statistika poretka je dovoljna statistika za svaki parametar i svaku familiju raspodela, pa je rešenje svakog takvog zadatka moglo biti - "vektor statistika poretka". Međutim on je dimenzije n , a nama je cilj da nađemo nešto što manje dimenzije. Minimalnost se uglavnom može videti iz teoreme Fišer-Nejmana kojom smo tražili DS, ako dovoljno dobro sredimo izraz u eksponentu. U svim do sada rađenim zadacima gde se tražila DS smo zapravo tražili **minimalnu dovoljnu statistiku**.

Definicija 1 Statistika T je minimalna ako za svaku dovoljnu statistiku S postoji funkcija g takva da je $T = g(S)$

Ova definicija ne daje princip kojim možemo da nađemo MDS. Sledeća teorema daje taj rezultat

Teorema 1 Neka je $f(x; \theta)$ gustina ili raspodela verovatnoća slučajnih veličina iz uzorka $\mathbf{X}$. Ako postoji funkcija $T(\mathbf{x})$, takva da za svaka dva uzorka $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ količnik $f(\mathbf{x}; \theta)/f(\mathbf{y}; \theta)$ ne zavisi od θ akko je $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y})$, tada je $T(\mathbf{X})$ minimalna dovoljna statistika.

Može se pokazati da je kompletna dovoljna statistika i minimalna.