

9.8.2025.

Консултације

2. (a) Дата је матрица $P \in M_4(\mathbb{R})$ облика $P = \begin{bmatrix} A & E \\ E & A \end{bmatrix}$, где је $A \in M_2(\mathbb{R})$ произвољна матрица и $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Одредити e^{xP} у зависности од e^{xA} .

(б) Решити систем диференцијалних једначина $X' = CX$, где је $C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$, одређивањем
матричне експоненцијалне функције e^{xC} (можете користити део (а), али није обавезно).

$$P = \begin{bmatrix} A & E \\ E & A \end{bmatrix} \quad e^{xP} \text{ преко } e^{xA}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 P_1 = \begin{bmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{xP} = e^{x(P_1 + P_2)} = e^{xP_1 + xP_2} \stackrel{\text{КОМУТАЦИЈА}}{=} e^{xP_1} \cdot e^{xP_2} = e^{\begin{bmatrix} 0 & xE \\ xE & 0 \end{bmatrix}}$$

$$e^{\begin{bmatrix} xA & 0 \\ 0 & xA \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{xA} & 0 \\ 0 & e^{xA} \end{bmatrix}$$

①. 9.8.1, 2024

$$\dot{x} = \frac{\dot{x}}{t} \cdot \frac{t}{1} = \frac{\dot{x}}{t} \cdot \frac{t}{1} = \frac{2\ln x \cdot \dot{x}}{x} = \frac{d}{dt}(\ln^2 x)$$

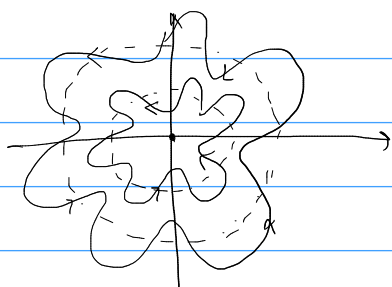
$$\frac{dx}{dt}$$

$$2\ln x \cdot t \, dx - (\ln^2 t - \ln^2 x) dt = 0$$

$$\frac{2\ln x}{x} \cdot t \, dx - (\ln^2 t - \ln^2 x) dt = d(t \ln^2 x - \int \ln^2 t)$$

Пајо: Да ли је Варгунова може да буде само форма?

$\| \cdot \| \leadsto$ које су конвексне



са почетка консултација:

Задатак 4. Ако поље F генерише ток φ^t , доказати да поље $G(x) = \alpha F(x)$ за $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ генерише ток $\psi^t = \varphi^{\alpha t}$.

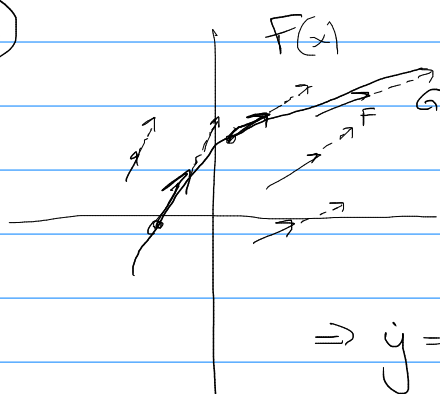
Претходни задатак можемо интуитивно да шватимо овако: множењем поља неком константом само мењамо његов интензитет, а интензитет поља у тачки је брзина решења ДЈ. Рецимо, скалирањем поља са 2 добијамо решења која се крећу дупло брже.

Задатак 5. Решити систем:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & e \\ 0 & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Задатак 6. Ако је $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ позитивна глатка² функција и $x(t)$ решење једначине $\dot{x} = F(x)$ са п.у. $\bar{x}(0) = x_0$, шта је решење једначине $\dot{y} = h(t)F(y)$ са истим п.у.? Показати да су $x(t)$ и $y(t)$ криве са истим трагом.

④



$$\dot{x}(t) = F(x) \rightarrow \text{решење } x(t)$$

$$G(x) = 2F(x)$$

$\Rightarrow \dot{y} = G(y)$ има иста решења само са другим параметризацијом

$$\Rightarrow y(t) = x(2t)$$

$$\frac{d}{dt}(y(t)) = \dot{x}(2t) \cdot (2t)' = 2F(x(2t)) = G(y) \quad \checkmark$$

(6.) Иста идеја, множење поља ф-јом не мења његов правац.

$$\dot{x} = F(x) \longrightarrow \text{решење } x(t)$$

$$\dot{y} = h(t)F(y) \longrightarrow \text{решење је иста крива као } x(t) \text{ само са другом параметризацијом}$$

1) Можемо да „набодемо“ $y(t) = x\left(\int_{t_0}^t h(s) ds\right)$

✓
репараметризација је
добра јер је $\int h(s) ds$ растућа
ф-ја јер је h позитивна

2) поставимо $y(t) = x(f(t))$

$$\begin{aligned} \leadsto \frac{d}{dt} y(t) &= \frac{d}{dt} (x(f(t))) = \dot{x}(f(t)) \cdot f'(t) \\ &= f'(t) \cdot F(y) \end{aligned}$$

$$\Downarrow \\ h(t) = f'(t) \quad / \int \dots$$

Задатак 9. Ако су у прошлом задатку решења $x(t)$ дефинисана за све $t \in \mathbb{R}$, да ли су и решења $y(t)$ дефинисана за све $t \in \mathbb{R}$?

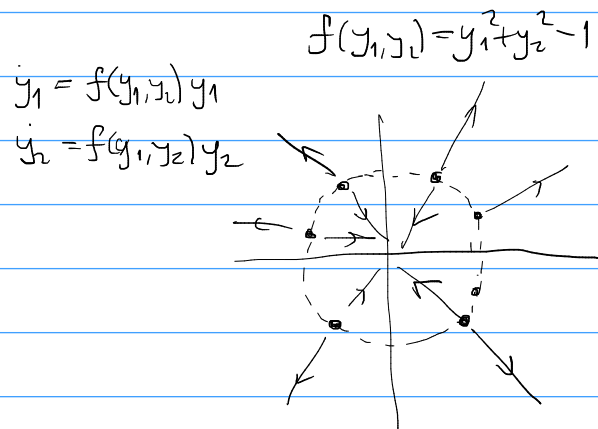
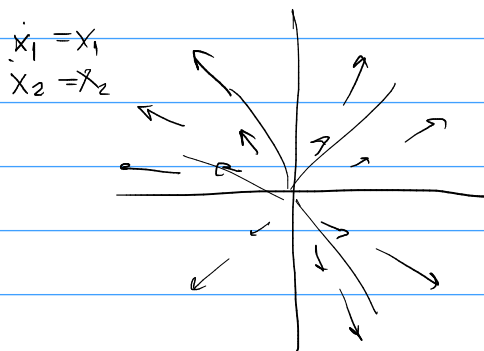
Задатак 10. Ако допустимо да у задатку 8 функција f мења знак, описати како се мењају решења кад помножимо поље са f . (Испробајте на сајту за скицање!)

(9) контрапример:

$$\dot{x} = F(x) = 1 \leadsto x(t) = t - t_0$$

$$f(x) = x^2 \leadsto \dot{y} = y^2 \leadsto y(t) = \frac{1}{c-t} \quad \text{није деф. за } \forall t$$

10. У тачкама где је $f(x) = 0$ се појављују еквипројектни, а где је $f < 0$ решења мењају смер кретања



Цртање фазног портрета пример:

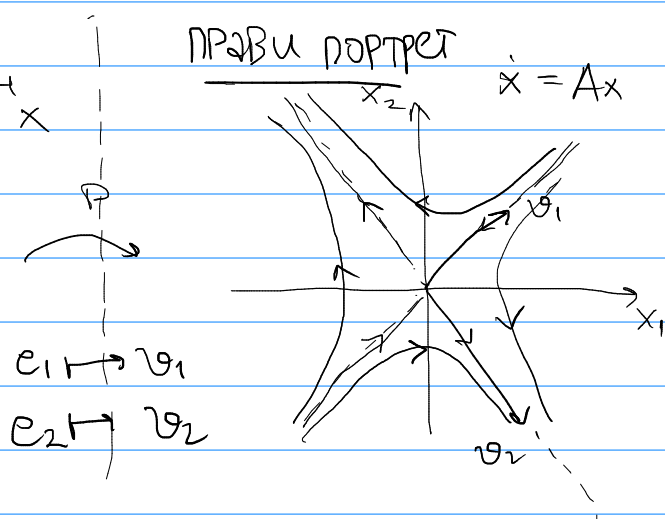
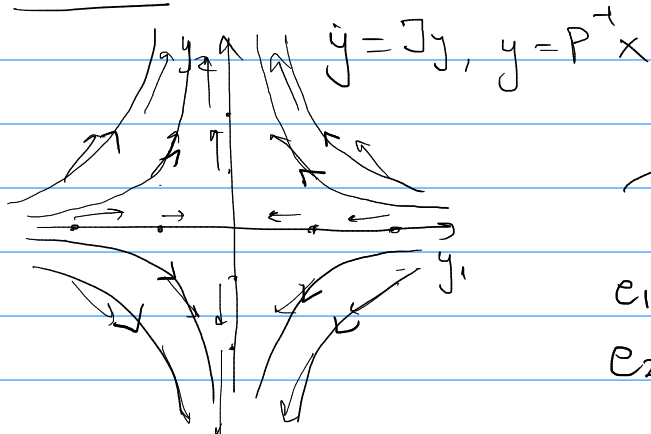
$\dot{x} = Ax \rightsquigarrow$ реџимо да се добија

$$A = P \Lambda P^{-1}$$

$$\underbrace{P^{-1} \dot{x}}_{\dot{y}} = \underbrace{P^{-1} x}_y = \underbrace{\Lambda}_{\Lambda} y$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

У ЖНФ:

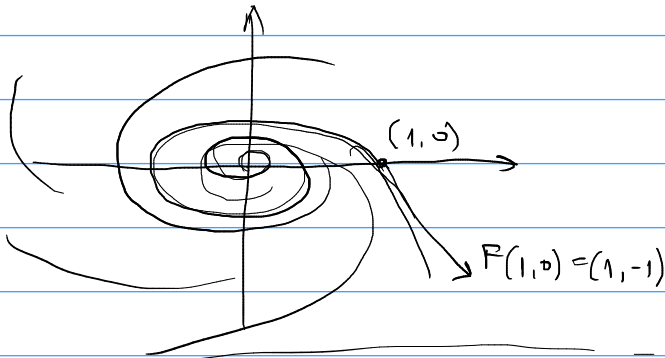


(са неког рока)

Скицирати портрете: $F(x,y) = (x+y, -x)$ $G(x,y) = (x+y, -x+1)$

$$\dot{X} = F \leadsto \text{ЖНФ} \dots$$

Добије се спирала,

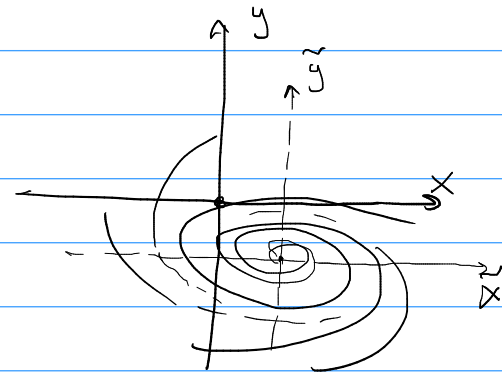


$$\dot{Y} = G$$

Може сменити координ.

$$\tilde{x} = x-1, \quad \tilde{y} = y+1$$

$$\Rightarrow \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x} + \tilde{y}, -\tilde{x})$$



За G може и експлицитно
да се решим J -на, она је
облика

$$\dot{X} = AX + \vec{c}$$

(радили смо, смена $y = x + A^{-1}\vec{c}$)

Последња опција: узети више тачака,

и нацртати поље G па
закључити како изгледају
решења.

