

28.7.2025.

Консултације

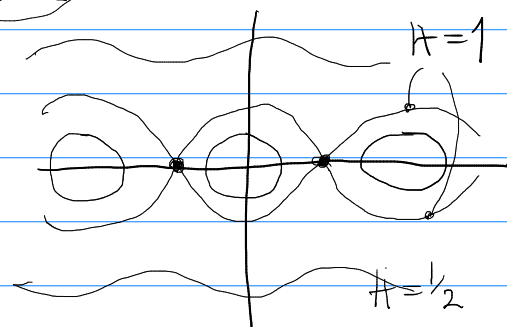
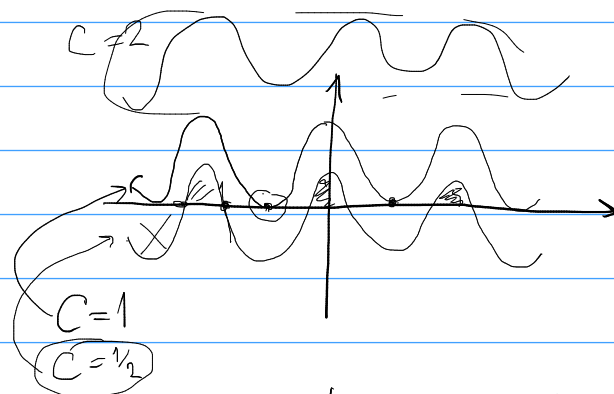
Функција
H(x,y)

$$H(x,y) = y^2/2 - \cos x = C$$

$$C + \cos x = y^2/2$$

$$(2C + 2\cos x) = y^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{array} \right\} = 0 \quad \begin{array}{l} y = 0 \\ \sin x = 0 \\ \dots x = k\pi \end{array}$$



гдџ 24

$$(3) \quad x^2 z^2 u_x - 2xy z^2 u_y - 2x z^3 u_z = 0$$

$$\begin{array}{l} \dot{x} = x^2 z^2 \\ \dot{y} = -2xy z^2 \\ \dot{z} = -2x z^3 \\ \dot{u} = 0 \end{array}$$

$$E(x,y,z)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial E}{\partial z} \dot{z} = 0$$

$$E_x \cdot x^2 z^2 - E_y \cdot 2xy z^2 - E_z \cdot 2x z^3 = 0$$

$$\underbrace{E_x}_{\frac{2}{x}} \cdot x - 2 \underbrace{E_y}_{\frac{1}{y}} \cdot y - 2 \underbrace{E_z}_{0} \cdot z = 0$$

$$E(x,y,z) = 2\ln x + \ln y$$

$$= \ln(x^2 y)$$

$$\tilde{E}_1 = x^2 y$$

$$E_x = \frac{1}{2}x$$

$$E_y = 0$$

$$E_z = \frac{1}{2}z$$

$$E_2 = 2\ln x + \ln z$$

$$\tilde{E}_2 = x^2 z$$

$$E_3 = \ln y - \ln z = \ln \frac{y}{z} \sim \tilde{E}_3 = \frac{y}{z}$$

Видно

Ако је парцијална хомогена и функција u има n променљивих, треба нам $n-1$ таквих интеграла

$$u(x, y, z) \rightsquigarrow \mathbb{R}^1$$

$$\phi(u, E_1, E_2) = 0$$

$$u = u(E_1, E_2)$$

решене ПДЈ су
хиперповрши

$$\phi(u, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2) = c$$

или

$$u = \psi(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2)$$

за неку ф-ју ψ

Шта се дешава код парцијалних? (кога занима)

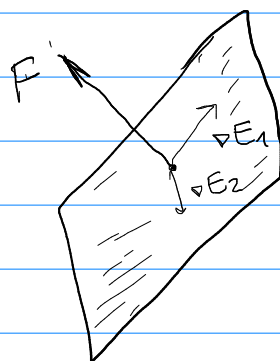
парцијална једначина $ax + by + cz = 0$
каже да је градијент функције u
 $\nabla u = (u_x, u_y, u_z)$

Нормалан на вектор $F = (a, b, c)$ у свакој
тачки (x, y, z) .

Градијент ∇u је вектор у домену ф-је u , тј.
у $\mathbb{R}^3(x, y, z)$. Према томе, пошто је нормалан
на вектор F , он припада

равни, тј. има два степена
слободе. Два прва интеграла

које тражимо су нека конкретна
решања ПДЈ (проверити на 3.
задачку изнад!), чији су градијенти



∇E_1 и ∇E_2 нормални на вектор F .

∇E_1 и ∇E_2 генеришу (линеарним комбинацијама) раван нормалну на F , па ∇u мора бити линеарна комбинација

$$\nabla u = \alpha \nabla E_1 + \beta \nabla E_2$$

за неке ф-је α, β . Одавде следи (није лако али је интуитивно) да функција u може да се изрази као функција од E_1, E_2 :

$$u(x, y, z) = \varphi(E_1(x, y, z), E_2(x, y, z))$$

за неку функцију φ . Ово је решење које се записује на крају задатка.

→ сада ако бисмо диференцирали ф-ју u ,

добили бисмо

$$\nabla u = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial E_1} \cdot \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial E_2} \cdot \frac{\partial E_2}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial E_1} \cdot \frac{\partial E_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial E_2} \cdot \frac{\partial E_2}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial E_1} \cdot \frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial E_2} \cdot \frac{\partial E_2}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial E_1} \cdot \nabla E_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial E_2} \cdot \nabla E_2 = \alpha \nabla E_1 + \beta \nabla E_2$$

(ово није доказ него убеђивање)

Слично се закључује да за хомогену ПДЗ са n променљивих треба $n-1$ првих интеграла јер је раван у том случају $(n-1)$ -димензиона.

За нехомогене ПДЗ, типа

$$au_x + bu_y + cu_z = f,$$

може да се увведе функција $\vartheta(x, y, z, \omega) = u(x, y, z) - \omega$.

Онда се така ПДЗ своди на хомогену

$$a\vartheta_x + b\vartheta_y + c\vartheta_z + f\vartheta_\omega = 0.$$

Одавде може да се закључи да за нехомогену треба још 1 први интеграл.