

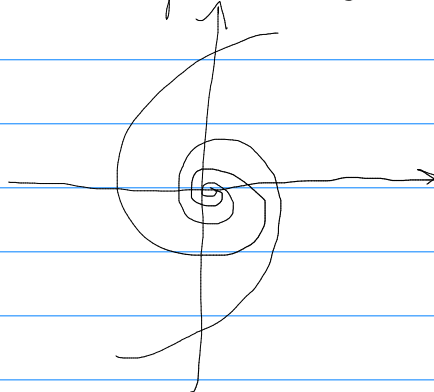
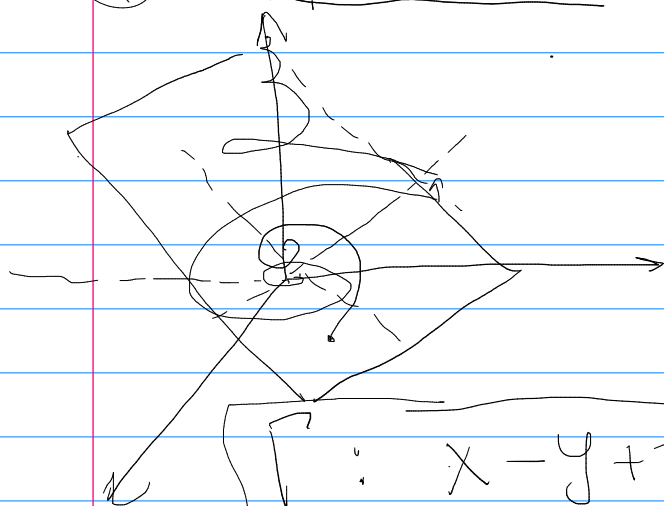
21.7.2025.

КОНСУЛТАЦИЈЕ

Писмени испит из Диференцијалних једначина (Р), 27.08.2024.

- У зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ решити диференцијалну једначину $(\alpha - 1)\dot{x}t^3 \ln t + (tx)^\alpha = xt^2$, $t > 0$.
- (а) Решити диференцијалну једначину $\dot{x} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 9 & -10 & 6 \end{bmatrix} x$.
(б) Дата је раван Γ у $\mathbb{R}^3$ својом једначином $\Gamma: x - y + z = 0$. Доказати да свако решење диференцијалне једначине из дела (а) са почетним условом на Γ остаје на Γ за све t . Другим речима, доказати импликацију $x(0) \in \Gamma \Rightarrow x(t) \in \Gamma, \forall t \in \mathbb{R}$.
(в) Нека је $B \in M_3(\mathbb{R})$ матрица која има једну реалну и две конјуговане комплексне (које нису реалне) сопствене вредности. Доказати да постоји раван Π у $\mathbb{R}^3$ тако да за свако решење $x(t)$ система диференцијалних једначина $\dot{x} = Bx$ важи импликација $x(0) \in \Pi \Rightarrow x(t) \in \Pi, \forall t \in \mathbb{R}$.
- Дате су функције $F, G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ са $F(p, q) = (p + q, -p)$ и $G(p, q) = (p + q, -p + 1)$. Скицирати фазне портрете диференцијалних једначина $\dot{x} = F(x)$ и $\dot{x} = G(x)$.

② Први Начин (шта се стварно дешава)



$$A = \begin{bmatrix} -10 & 10 & -5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 9 & -10 & 6 \end{bmatrix}$$

→ сопствени вектори
 v_1, v_2, v_3

Ако су λ_i различити:

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3$$

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

Ако $x_0 \in \Gamma$, докажите се $c_3 = 0$
јер v_1 и v_2 генеришу Γ .

$$x(t) = \underbrace{c_1 e^{\lambda_1 t}}_{\text{дој}} \underbrace{v_1}_{\text{дој}} + \underbrace{c_2 e^{\lambda_2 t}}_{\text{дој}} \underbrace{v_2}_{\text{дој}} + 0$$

$x(t)$ је линеарна комб. v_1 и v_2

$$\Rightarrow x(t) \in \Gamma \quad \forall t$$

$$v_1 \rightsquigarrow v_2, v_3$$

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = \lambda_2 v_2 + v_1$$

$$x(t) = \underbrace{c_1 e^{\lambda_1 t}}_{\text{дој}} \underbrace{v_1}_{\text{дој}} + \underbrace{c_2 e^{\lambda_2 t}}_{\text{дој}} (t \underbrace{v_2}_{\text{дој}} + \underbrace{v_1}_{\text{дој}})$$

$$x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

Тата израз
је на пош.
страни, ово
је отприлике
ради објашњења

$$\lambda_1 \in \mathbb{R}, \quad v_1$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \in \mathbb{C}, \quad v_2, v_3$$

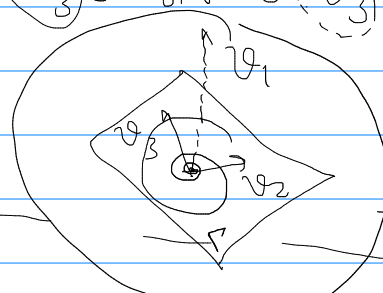
$$Bv = \lambda_2 v$$

$$v_2 = \operatorname{Re} v, \quad v_3 = \operatorname{Im} v$$

$$\lambda_2 = \alpha + i\omega$$

решете: $x(t) = \underbrace{c_1 e^{\lambda_1 t}}_{\text{дој}} \underbrace{v_1}_{\text{дој}} + \underbrace{c_2 e^{\lambda_2 t}}_{\text{дој}} \cos \omega t \underbrace{v_2}_{\text{дој}} + \underbrace{c_3 e^{\lambda_2 t}}_{\text{дој}} \sin \omega t \underbrace{v_3}_{\text{дој}}$

Бонус задатак: Доказати:
 $c_2 = 0 \Leftrightarrow c_3 = 0$



узмемо
да Γ генери-
цу v_2, v_3 .
попробујте
слику!

Други начин: може и чисто рачуноски,
израчуна се тата $x(t)$.

$$\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

и директно се провери да важи $x(t) - y(t) + z(t) = 0$,
тј. да припада Γ . Не пош. В) су неки
урадили исто овако али је теже.

Помоћ:
распиши
 $Bv = \lambda v$
искористи
 $\dot{x} = Bx$

због овога
се узме да
 Γ генерицу
 v_2, v_3 јер
их је некако
развијати
(наравно, то се
најлакше види
са слике)

РАЧУН БЕЗАМ ЗА НАПОНЕЋУ ИЗНАД, НИЈЕ ЛЕО РЕШЕЊА ЗАДАТКА.

Ако је $\lambda_1 = \lambda_2$ и v_2 сопствени за v_1 ,
важи $Av_2 = \lambda_1 v_2 + v_1$

$e^{At} v_1 = e^{\lambda_1 t} v_1$ јер ако је λ_1 сопствена за A
онда је $e^{\lambda_1 t}$ сопствена за e^{At}

$$\begin{aligned} e^{At} v_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} v_2 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k (\lambda_1^k v_2 + k \lambda_1^{k-1} v_1)}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} v_2 + t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^{k-1}}{(k-1)!} v_1 \\ &= e^{\lambda_1 t} v_2 + t e^{\lambda_1 t} v_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^k v_2 &= A^{k-1} (\lambda_1 v_2 + v_1) \\ &= A^{k-2} (\lambda_1^2 v_2 + \lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_1) \\ &= A^{k-2} (\lambda_1^2 v_2 + 2\lambda_1 v_1) \\ &= \dots = \lambda_1^k v_2 + k \lambda_1^{k-1} v_1 \end{aligned}$$

ово је можда
може једноставније
...

$\Rightarrow$ Ако је $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$,

онда је

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} (c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3) \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 (e^{\lambda_1 t} v_2 + t e^{\lambda_1 t} v_1) + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 \end{aligned}$$

Дакле свакако, $x(t)$ може увек да се
запише као линеарна комбинација
сопствених (заједно са сопственим) вектора.
 $x(t) = c_1(t) v_1 + c_2(t) v_2 + c_3(t) v_3$

У задатку 2 нам је дати поч. усл.
па треба разумети шта је $x_0 = x(0)$, а шта $x(t)$

Конкретно за израз у црвеном је

$x(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$, па иако је $\text{linp. } c_1 = 0$,
вектор v_1 ће се појавити у $x(t)$ јер је v_2 соп. за v_1 .