

**Писмени испит из Дистрибуција и парцијалних једначина А (М)
и Једначина математичке физике (Н), 13.01.2024.**

1. Нека је $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ограничена област.

(а) Претпоставимо да је $u: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ функција за коју важи $u_{xx} + 2u_{yy} + u_y = 0$ на D . Уочимо функцију $v: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ задату са $v(x, y) = u(x, y) + \varepsilon x^2$, за $\varepsilon > 0$. Доказати да за v важи принцип максимума, тј. $\max_{\bar{D}} v = \max_{\partial D} v$.

Одатле закључити да важи принцип максимума за u , односно $\max_{\bar{D}} u = \max_{\partial D} u$.

(б) Доказати принцип минимума за u , односно $\min_{\bar{D}} u = \min_{\partial D} u$.

(в) Нека је $\varphi: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ произвољна непрекидна функција. Доказати да следећи проблем може имати највише једно решење у скупу функција $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ класе $C^2(D) \cap C(\bar{D})$.

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + 2u_{yy}(x, y) + u_y(x, y) &= 0, & (x, y) \in D; \\ u(x, y) &= \varphi(x, y), & (x, y) \in \partial D. \end{aligned}$$

2. Нека је $D = (0, \pi) \times (0, 4) \subseteq \mathbb{R}^2$. Решити следећи проблем (одредити решење $u: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ класе $C^2(D) \cap C(\bar{D})$ и доказати да је јединствено):

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + 2u_{yy}(x, y) + u_y(x, y) &= 0, & (x, y) \in D; \\ u(0, y) = u(\pi, y) &= 0, & y \in [0, 4]; \\ u(x, 0) = \sin 6x, & u(x, 4) = \sin x, & x \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Помоћ: За егзистенцију решења послужити се Фуријеовом методом раздвајања променљивих.

3. Нека је $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \pi, t > 0\}$. Решити следећи проблем (одредити решење $u: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ класе $C^2(D) \cap C(\bar{D})$ и доказати да је јединствено):

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t) - 2, & (x, t) \in D; \\ u(x, 0) &= x - \pi + \sin 3x, & u_t(x, 0) = x^3 - \pi^2 x, & x \in [0, \pi]; \\ u(0, t) &= -t^2 - \pi, & u(\pi, t) = -t^2, & t \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

**Писмени испит из Дистрибуција и парцијалних једначина А (М)
и Једначина математичке физике (Н), 05.02.2024.**

1. Посматрамо функцију $u: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{C}$ дату са

$$u(z) = \operatorname{Re}(\tan z) = \operatorname{Re} \left(-i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \right),$$

где је са D означен максимални (у смислу инклузије) скуп на ком је она дефинисана. Применом својства средње вредности за хармонијске функције где је то могуће, израчунати дате интеграле. У случају да није могуће применити својство, објаснити зашто то није могуће.

$$(a) \int_0^{2\pi} u \left(\frac{\pi}{3} + \frac{e^{it}}{2} \right) dt;$$

$$(б) \int_0^{2\pi} u \left(\frac{\pi}{3} + e^{it} \right) dt.$$

2. Дата је парцијална једначина $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = \cos(2x + y)$, где је $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(а) Одредити тип, свести на канонски облик и одредити опште решење дате парцијалне једначине.

(б) Одредити и оно решење $u(x, y)$ за које важе услови $u(x, -x) = \frac{1}{2}x^2 \cos x$, $u_x(x, -x) = x \cos x - x^2 \sin x - x$, за $x \in \mathbb{R}$.

3. Нека је $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \pi, t > 0\}$. Решити следећи проблем (одредити решење $u: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ класе $C^2(D) \cap C(\bar{D})$ и доказати да је јединствено):

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + tx^2, & (x, t) \in D; \\ u(x, 0) &= 0, & x \in [0, \pi]; \\ u_x(0, t) &= u_x(\pi, t) = 0, & t \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

**Писмени испит из Дистрибуција и парцијалних једначина А (М)
и Једначина математичке физике (Н), 24.06.2024.**

- Нека је $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ цела функција. Доказати да је $|f|: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ хармонијска функција ако и само ако је f константа.
- Нека је $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1, y > 0\}$. Решити проблем у скупу ограничених функција на $\overline{\Omega}$ (одредити решење $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ класе $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ које је ограничено на $\overline{\Omega}$ и доказати да је јединствено):

$$\Delta u(x, y) = \frac{2}{(1+y)^3}, \quad (x, y) \in \Omega;$$

$$u(x, y) = \frac{y^2 + y + 1}{y + 1}, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

- Нека је $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0\}$. Решити следећи проблем (одредити решење $u: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ класе $C^2(D) \cap C(\overline{D})$ и доказати да је јединствено):

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = \pi x(\pi - 2x) \cos 2t, \quad (x, t) \in D;$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$u(0, t) = u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad t \in [0, +\infty).$$

**Писмени испит из Дистрибуција и парцијалних једначина А (М)
и Једначина математичке физике (Н), 30.08.2024.**

- Нека је $D = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 1, t > 0\}$. Решити следећи проблем (одредити решење $u: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ класе $C^{2,1}(D) \cap C(\overline{D})$ и доказати да је јединствено):

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = e^t \sin(\pi x) + (x+1)t, \quad (x, t) \in D;$$

$$u(x, 0) = x^2 - x, \quad x \in [0, 1];$$

$$u(0, t) = t, \quad t \in [0, +\infty).$$

$$u(1, t) = 2t, \quad t \in [0, +\infty).$$

- Испитати да ли постоји хармонијска функција $u: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ таква да је:

$$u(x, y) = 30, \quad \text{ако је } x^2 + y^2 = 1,$$

$$u(x, y) = 8, \quad \text{ако је } x^2 + y^2 = 2,$$

$$u(x, y) = 2024, \quad \text{ако је } x^2 + y^2 = 3.$$

- Нека је $D = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$. Решити следећи проблем у скупу позитивних функција на D (одредити решење $u: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ класе $C^2(D) \cap C(\overline{D})$ које је позитивно на D и доказати да је јединствено):

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = \frac{u_t(x, t)^2 - u_x(x, t)^2}{2u(x, t)}, \quad (x, t) \in D;$$

$$u(x, 0) = x^4, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Помоћ: Можете претпоставити да за решење u важи $u > 0$ на D . Уочите смену $v(x, t) = \sqrt{u(x, t)}$.